

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：33108

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14333

研究課題名（和文）非線形距離空間の幾何学的特徴付け

研究課題名（英文）Geometric characterization of nonlinear metric spaces

研究代表者

富澤 佑季乃 (Tomizawa, Yukino)

新潟工科大学・工学部・講師

研究者番号：10809403

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、線形空間の一般化である完備な Busemann 空間における一様凸性の特徴付けを得ることである。これに対し、以下三つの命題を証明することができた：

(1) Banach 空間における一様凸性に関する係数 modulus of convexity が持つ性質が完備な Busemann 空間上へ一般化できること。(2) 完備な Busemann 空間における一様凸性と同値な性質として三点の距離による「2乗平均」を含む不等式が存在すること。(3) 完備かつ測地線拡張特性を有する Busemann 空間における弱一様凸性と同値な性質として三点の距離による「p乗平均」を含む不等式が存在すること。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1930年代から発展してきた Banach 空間の幾何学は、関数解析学の小分野の一つであり、他分野でも応用されている有用な理論体系である。また近年、最適化問題の計算などで非線形な距離を持つ距離空間が扱われるようになり、その幾何学的性質が重要視されている。しかしながら、非線形な距離を持つ距離空間の幾何学的性質を数値で表すという試みは、本研究以前には例がなかった。本研究成果は空間の性質の新しい分類法を与え、将来的には他分野への応用に繋がるなどの展望がある。本研究の位置付けは、既存の「Banach 空間の幾何学」をより一般化するものであり、かつ他分野へ応用できる距離空間の基礎的知見を得ることである。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is to characterize convexity in complete Busemann spaces, which are geodesic spaces with non-positive curves. In response, I was able to prove three propositions:

(1) One property of the modulus of convexity associated with the concept of uniform convexity in Banach spaces can be generalized to complete Busemann spaces. (2) In complete Busemann spaces, the uniform convexity is equivalent to an inequality containing 2-power mean related to distances between three points. (3) In complete Busemann spaces with the geodesic extension property, the weak uniform convexity is equivalent to an inequality containing p-power mean related to distances between three points.

研究分野：函数解析学

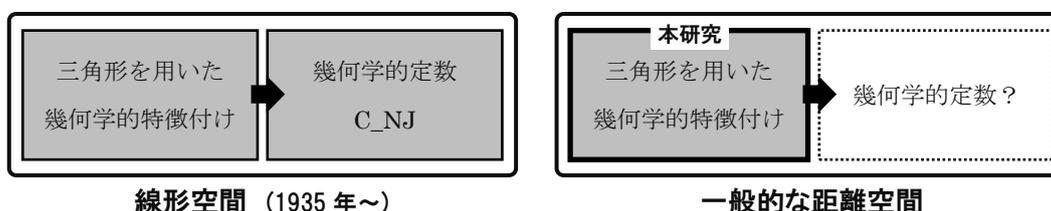
キーワード：Busemann 空間 一様凸性 弱一様凸性 凸結合 幾何学的性質

1. 研究開始当初の背景

1935年、線形空間の幾何学的特徴に言及した Jordan と von Neumann の論文*2により、ベクトルの長さで構成される幾何学的定数（以下、 C_{NJ} ）という概念が導入された。この定数は線形空間の幾何学的特徴を実数値で表し、線形空間全体を幾何学的に評価するには空間内の三角形一つを用いればよいという性質から得られるものである。この結果を基に、線形空間が有する性質と C_{NJ} 値の関係、ノルムに依存する C_{NJ} 値の具体的な算出方法、新たな幾何学的定数の設定や性質などが、多くの研究者によって明らかにされてきた。これらの知見は微分方程式の解の存在に関係するなど、解析学および他分野においても有益な結果とされている。一方、距離が線形性を持たない距離空間（以下、一般的な距離空間）が数理解析学などの応用分野で近年用いられてきており、関数解析学においても基礎研究が行われている。しかしながら、一般的な距離空間の幾何学的特徴を線形空間のように定式化して評価する議論は、研究開始当初の時点では行われていなかった。

2. 研究の目的

本研究の目的は「一般的な距離空間の幾何学的形状を、三角形の性質で特徴付ける」ことである。これは、一般的な距離空間においても C_{NJ} に相当する定数が存在するか、という問題提起に起因する。具体的には、一般的な距離空間では幾何学的定数を定義できる性質が存在するか、すなわち、線形空間における幾何学的特徴付けと同等の手法を一般的な距離空間でも扱えるかどうか、研究開始時点では不明であった。したがって、一般的な距離空間全体を幾何学的に評価するのに、空間内の三角形一つで与えられる手法は存在するか (図1) を調査し、論理的に証明することが本研究の目的となった。



(図1) 線形空間と同じ特徴付けが、距離空間でも可能か？

3. 研究の方法

ベクトルで図形が構成される線形空間とは異なり、図形の拡大縮小における相似性などが保たれない一般的な距離空間において、どのように空間の幾何学的形状を調べるかが課題であった。今回は解決への切り口として、特に空間の凸性に着目した。凸性は線形空間のみならず一般的な距離空間でも定義される性質のため、これを用いることにより双方の空間で同等な議論を展開できると予想した。この背景から、既に明らかにされた線形空間の幾何学的特徴付けを内含する形で、一般的な距離空間における三角形を用いた凸性の幾何学的特徴付けが存在するかを明らかにするという方針で研究を進めることとなった。そのため必要な命題として、次の**三つの性質について調査**を行った：(1) 距離空間の「凸性に関する係数」(以下、モデュラス)の性質、(2) 三角形の辺の比から得る、距離空間の一樣凸性の特徴付け、(3) 三角形の辺の比から得る、距離空間の弱一樣凸性の特徴付け。また具体例が存在し得る距離空間を意識して、今回は**完備な Busemann 空間を扱う**ことにした。これは距離が線形性を持たないが、二点間の測地線が一本のみである、距離が凸性を有する、点の凸結合が存在することなどから、線形空間の一般化としては適切な研究対象といえる。

4. 研究成果

完備な Busemann 空間における凸性の幾何学的特徴付けを研究し、以下の結果を得た。

(1) 空間内の三角形に対するモデュラスの性質

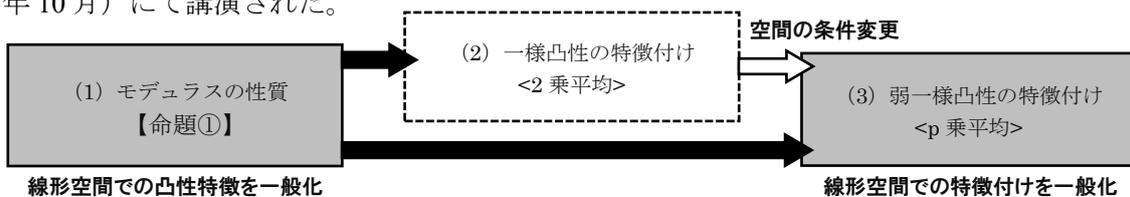
一様凸な Banach 空間では「三角形に内包されるベクトルの長さが、モデュラスを用いて得られる一定の値以下である」*1 ことが明らかになっている。この命題を、完備な Busemann 空間にて同じ手法で証明するには、ベクトルの合成を三点の凸結合に置き換えなければならない。ここで新たな工夫として、線形空間では同等だが Busemann 空間では異なる二種に分別される凸結合を設定した。この凸結合により、距離が線形性を持たずとも上記の命題と同じ結果が得られると判明した。すなわち「**三角形に内包される測地線の長さが、モデュラスを用いて得られる一定の値以下である**」(以下、【命題①】) ことが完備かつ一様凸な Busemann 空間で成り立つと証明できた。更に【命題①】から「ある二種類の凸結合間の距離を導き、それが Hadamard 空間と Euclid 平面の形状の差で与えられる値以下である」ことを示した。これらの結果は研究集会で発表され、2020年に査読付き論文*3として学術誌に掲載された。

(2) 一様凸性の幾何学的特徴付け

Banach 空間では「一様凸であることと、二つのベクトルによる p 乗平均 ($1 < p < \infty$) を含む不等式が存在することは同値である」*1と明らかになっている。これは Banach 空間における一様凸性の幾何学的特徴付け (以下、【既存定理】) であるが、完備な Busemann 空間でも同様な性質が成り立つかどうかを検証した。手法は上記 (1) と同様に、ベクトルの合成を三点の凸結合に置き換えるために適切な凸結合を設定した。これにより【命題①】を用いて、「**一様凸であることと、三点が与える測地線による 2 乗平均を含む不等式が存在することは同値である**」と完備な Busemann 空間で証明できた。本結果は一様凸性の幾何学的特徴付けであり、研究者所属機関の紀要*4に掲載された。しかしながら 2 乗平均の形に留まっていることや測地線の設定などから、この特徴付け自体は【既存定理】の直接的な一般化ではなかった。

(3) 弱一様凸の幾何学的特徴付け

上記 (2) の結果を改良するため、Busemann 空間の自然な性質として、測地線の拡張が可能であるという測地線拡張特性を有する条件を追加した。更に空間の凸性においては、Banach 空間では一様凸性と同値だが Busemann 空間ではより大域的な性質として区別される弱一様凸性について扱うこととした。同じく【命題①】を用いることで、「**弱一様凸であることと、三点が与える測地線による p 乗平均 ($1 < p < \infty$) を含む不等式が存在することは同値である**」と完備かつ測地線拡張特性を有する Busemann 空間で証明できた。これは Banach 空間から Busemann 空間へ拡張された幾何学的特徴付け、すなわち【既存定理】の直接的な一般化である。本結果の概要は、日本数学会秋季分科会 (2023年9月) や実解析シンポジウム (2023年10月) にて講演された。



(図 2) 研究のフローチャート

*1 B. Beauzamy, Introduction to Banach Spaces and their Geometry, Vol. 68. Elsevier, 2011.

*2 P. Jordan and J. v. Neumann, "On inner products in linear, metric spaces", Annals of Mathematics 36(3) (1935) 719-723.

*3 Y. Tomizawa, "Distances between convex combinations in Hadamard spaces", Linear and Nonlinear Analysis 6(1) (2020) 153-166.

*4 富澤佑季乃, "完備な Busemann 空間の一様凸性", 新潟工科大学研究紀要 27 (2023) 41-48.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 富澤佑季乃	4. 巻 27
2. 論文標題 完備なBusemann空間の一様凸性	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 新潟工科大学研究紀要	6. 最初と最後の頁 41-48
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.34447/00001003	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yukino Tomizawa	4. 巻 Vol. 6, No. 1
2. 論文標題 Distances between convex combinations in Hadamard spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 153-166
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 富澤佑季乃
2. 発表標題 完備 Busemann 空間の弱一様凸性の特徴付け
3. 学会等名 実解析シンポジウム2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 富澤佑季乃
2. 発表標題 完備 Busemann 空間の弱一様凸性
3. 学会等名 2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 富澤佑季乃
2. 発表標題 測地距離空間の幾何学的性質
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 富澤佑季乃
2. 発表標題 完備 Busemann 空間の一様凸性
3. 学会等名 実解析学シンポジウム2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 富澤佑季乃
2. 発表標題 The modulus of convexity of Busemann spaces
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 富澤佑季乃
2. 発表標題 完備 Busemann 空間の一様凸性
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------