

令和 6 年 5 月 5 日現在

機関番号：34316

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14337

研究課題名（和文）絶対値乗型の非線型項を伴うシュレディンガー方程式の解の爆発解析

研究課題名（英文）Study on blowup phenomena for Schrödinger equations with non-gauge invariant power type nonlinearities

研究代表者

藤原 和将 (Fujiwara, Kazumasa)

龍谷大学・先端理工学部・准教授

研究者番号：40868262

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、周期境界条件の下で、1次元半線型シュレディンガー方程式の解の時間大域可解性の為の、可積分な初期条件に対する分類を完成させた。特に、初期状態の振動が如何に微細であっても、その振動によって解の有限時刻爆発現象が生じる、初期条件に対する特異な不安定性が確認された。加えて2次元の場合は、周波数成分間の相互作用による解の抑制効果が大きくなることが観測されていて、高次元の場合は解の初期値依存性が安定化する可能性を示唆できた。また、半線型消散型波動方程式の解の爆発時刻を評価する為の、技術的な要件を緩和し、初期状態の積分平均が0である場合の解の存在最大時刻の精密な評価を新たに導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究における学術的意義は、従来の解析手法では不可欠であった初期状態に対する積分平均の符号条件を緩和した事にある。従来の解析手法は、複雑な非線型効果による解の増大の様相を、解の積分量に着目する事で要約していた。一方で、本研究ではシュレディンガー方程式や消散型波動方程式の初期状態の振動の影響を考慮する事で、方程式の非線型効果に対して一歩踏み込んだ理解を与えた。特に、本研究で解明した初期状態の振動が与える解の挙動への影響は、計算シミュレーションによる観測が困難なものであり、純粋数学による解析手法の効果を示す一例を提示できた。

研究成果の概要（英文）：In this study, we have completed the classification of integrable initial conditions for the global time solvability of solutions to the one-dimensional semi-linear Schrödinger equation under periodic boundary conditions. Particularly, a singular instability concerning initial conditions has been identified, wherein finite-time blow-up phenomena of solutions occur due to oscillations in the initial state, no matter how small they are. Additionally, in the case of two dimensions, a significant inhibitory effect on solutions due to interactions between frequency components has been observed, suggesting the potential stabilization of initial value dependency of solutions in higher dimensions.

Furthermore, we have relaxed the technical requirements for evaluating the maximum existence time of solutions to semi-linear damped wave equations and derived a precise evaluation of the maximum existence time of solutions when the integral average of the initial state is zero.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：爆発解析 初期値問題 分散型方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

半線型分散型波動方程式の解の爆発現象は、典型的な非線型現象として広く研究されている。絶対値冪乗型の自己相互作用は、解の爆発現象を生じさせる代表的な自己相互作用である。従来の研究では、解の積分量に着目した解析手法で、絶対値冪乗型の自己相互作用を伴う分散型方程式の解の挙動が検討されてきた。一方で、解の挙動は初期状態の積分平均量だけではなく、振動によっても影響を受ける。初期状態の振動に由来する非線型効果は、方程式毎の特性が強く、従の一般論的な解析では把握し切ることが出来ない。

2. 研究の目的

本研究の目的は、絶対値冪乗型の自己相互作用を伴う分散型方程式の初期状態の振動に由来する非線型効果を明らかにし、初期状態に応じた解の挙動を理解することである。

3. 研究の方法

本研究の方法は、従来の初期状態に対する積分平均の符号条件が成立しない場合における時間大域可解性を検討する。そして、初期状態の振動に由来する非線型効果が、解の有限時刻爆発現象を生じる程度の強度があるかを判定する事で、非線型効果の影響を測る。より具体的には、複雑な非線型効果の影響を要約する様な汎関数の設計や、振動の影響を従来よりも反映した汎関数の評価方法を考案する。そして、初期状態の大きさに応じて解の存在最大時刻（爆発時刻）がどのように変動するかを検討することによって、初期状態の振動に由来する非線型効果の強度を測る。

4. 研究成果

本研究では、周期境界条件における半線型 Schrödinger 方程式や、全空間における半線型構造消散型波動方程式や、半線型消散型波動方程式について以下の成果を得た。

令和2年度の研究では、一次元の周期境界条件に於いて、絶対値の自乗の非線型項を有する Schrödinger 方程式の初期値問題に対する時間大域可解性を検討した。本初期値問題の時間大域可解性の研究は、解の空間変数に対する積分平均である、Fourier 0 モードに着目した研究が行われていた。一方で、解の空間変数に対する振動がどのように時間大域可解性に影響するかは検討されておらず、解析手法に就いても未確立である。このような状況は、Schrödinger 方程式や周期境界条件の初期値問題に関わらず、広く時間大域可解性の研究に於いて同様に未解決である。本研究では、Bourgain が導入した Schrödinger 方程式の線型解による解の分解を用いて、時間大域可解性の為の初期値の必要充分条件を導出した。特に、これまでの数値計算による予想とは異なり、初期状態の僅かな振動でさえも解の有限時刻爆発現象を引き起こす事を証明した。これは、Fourier 0 モード以外の情報を加味してこなかった既存の研究とは一線を画するものである。又、同初期値問題に見受けられる時間大域解の極端な不安定性も初めて証明された。

令和2年度の研究の特色は、分解された解が満たす無限連立常微分方程式系を共鳴部と非共鳴部に分解し、二元連立常微分方程式系に帰着させた事である。取分け、共鳴効果を利用して共鳴部を無視可能な剰余項として評価する事で、解析可能な単純な非共鳴部の常微分方程式系を抽出した点が他の爆発解析とは異なる点である。非共鳴部の成す連立方程式系の解析に就いても、時間大域可解性の為の条件を精査した他、解をランベルトの W 関数と呼ばれる特殊関数によって具体的に書き下す事に成功した。この解の表現により、これまで以上に爆発解の爆発の様子を詳しく見る事ができた。なお本研究成果は、Pisa 大学の V. Georgiev 教授との議論の中で得られた。

令和3年度の研究では、分数階の微分作用素を伴う半波動方程式に対して、臨界尺度に於ける解の爆発現象を示した。熱方程式や消散型波動方程式の様に古典的な微分作用素のみを伴う初期値問題に対しては、方程式の伸縮構造の観点から時間大域解が存在しない事が知られている。特に、古典的な微分作用素に対する積の微分法則が、大域解の不在証明に於いては技術的な要点である。一方で、分数階微分作用素を伴う場合、古典的な微分作用素と異なり、関数の積の導関数を夫々の関数の導関数によって各点で書き下す事は一般にできない。令和3年度の研究では、多項式程度に減衰する試験関数に対して、分数階導関数の各点での挙動を調べる事で、臨界尺度

に於ける解の爆発現象を証明した。前年度までの研究では、既に分数階導関数の無限遠方に対する減衰度合いの評価を得ていた。一方で臨界尺度に於いては、分数階導関数の原点での挙動をより詳しく調べる必要があった。令和3年度の研究では、2つの試験関数の差分に対する分数階導関数に着目する事で、原点での分数階微係数を制御した。加えて、試験関数の古典的な導関数も応用する事で、原点での分数階導関数の減衰の度合いを評価した。以上の分数階導関数の概形の研究を、既存の汎関数を用いた爆発解析と組み合わせる事で、解の爆発現象を証明した。

この研究は半波動方程式に限らず、構造消散型波動方程式や分数階微分作用素を伴う方程式に応用する事が容易であり、これまでの伸縮構造に基づく爆発解析を進展させるものである。

令和4年度の研究では、消散型波動方程式の初期値問題の爆発解析を進展させた。特に、初期位置と初期速度が各点で相殺する場合の爆発解析について検討した。この場合、従来の弱形式を経由する爆発解析を直接適用することはできず、周期境界条件における Schrödinger 方程式の場合と同様に解の振動が与える影響を検討する必要がある。令和4年度の研究では、直線上の消散型波動方程式に対して、周期境界条件での Schrödinger 方程式の様な極端な不安定性は発生しないものの、初期位置と初期速度が相殺する場合は、自己相互作用の形状に応じて解が延長される事が判明した。特に、解の存在最大時刻は、解の連続性の観点から延長できる最長の時刻まで延長される事を示した。解の存在最大時刻が延長される理由は、対応する自由解の減衰速度が、他の場合に比べて早い事に起因する。非線形問題の解は大凡自由解の周辺で発展する摂動論の枠組みで構成する。初期位置と初期速度が相殺する場合は、自己相互作用に由来する Duhamel 項の影響と自由解が拮抗する時刻において、解が初期状態に比べて小さくなる為、更にそこから通常の摂動論によって解を構成する事で、解の存在最大時刻を精密に評価する事が可能となった。一方で2022年度の研究では、Li, Zhou の議論を改良し、解が非正値を維持したまま大域的に存在する為の初期状態の条件を拡張した。特に、従来の古典解を経由した議論を回避する為に、消散型波動方程式の波動方程式への変形を積分方程式の観点から整理した。具体的には、消散型波動方程式の発展作用素の積分核を構成する Bessel 関数の計算を容易にする積分変数の変換を用いる事で、初期状態の滑らかさを全く仮定することなく、Li, Zhou の議論を拡張する事ができた。また、令和4年度の研究では、更に詳細な爆発解析を進展されるた為に、対応する常微分方程式の解析を進展させた。

令和5年度の研究では、初期変位と初期速度の積分平均が相殺する場合の1次元半線型消散型波動方程式に対して、解の存在最大時刻に対する精密な評価を得た。特に、初期変位と初期速度の和に対する1次モーメントの値に着目し、1次モーメントの値に応じた非線型効果の及ぼす、解の存在最大時刻への影響を、時間局所可解性が担保される初期条件に対して完成させた。この議論では、従来の摂動理論では解の挙動を捉える事が出来ない理由が、解の挙動が一定の時刻以降、初期変位と初期速度の0次モーメントが消えている自由解とは異なっている事に着目した。そして、2段階の摂動理論を用いて、自由解と非線型効果が釣り合う時刻から解を再構成する事によって、解の存在最大時刻を精確に捉える事に成功した。特に、解の爆発の議論においては、先行研究で用いられていた解に対する汎関数を改良することができた。この改良により、従来着目していた0次モーメントが初期時刻において消えている場合の特徴を捉えつつ、本研究で導入した二段階の摂動理論に呼応する形で、解の爆発現象を常微分方程式の枠組みによって把握する事ができた。また、本研究で導入した手法を用いることで、高次元の半線型消散型波動方程式の解の存在最大時刻を把握する事や、同様の技術的な要件で解の存在最大時刻が議論されている構造消散型波動方程式に対しても、解の存在最大時刻に対する理解を深めることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 K. Fujiwara and V. Georgiev	4. 巻 -
2. 論文標題 Lifespan estimates for 1d damped wave equation with zero moment initial data	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 K. Fujiwara and V. Georgiev	4. 巻 -
2. 論文標題 On extended lifespan for 1d damped wave equation	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematical Methods in Applied Sciences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 K. Fujiwara and V. Georgiev	4. 巻 12
2. 論文標題 A new class of small initial data which may shift the critical power and lifespan estimates for the classical damped wave equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Evolution Equations and Control Theory	6. 最初と最後の頁 1122 ~ 1132
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/eect.2023003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Fujiwara Kazumasa	4. 巻 124
2. 論文標題 Lifespan estimates of 1D non-gauge invariant semilinear semirelativistic equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Applied Mathematics Letters	6. 最初と最後の頁 107619 ~ 107619
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aml.2021.107619	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Kazumasa	4. 巻 23
2. 論文標題 Note on the lifespan estimate of solutions for non-gauge invariant semilinear massless semirelativistic equations with some scaling critical nonlinearity	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-022-00865-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Kazumasa, Vladimir Georgiev	4. 巻 12
2. 論文標題 A new class of small initial data which may shift the critical power and lifespan estimates for the classical damped wave equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Evolution Equations and Control Theory	6. 最初と最後の頁 1122 ~ 1132
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/eect.2023003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujiwara Kazumasa	4. 巻 124
2. 論文標題 Lifespan estimates of 1D non-gauge invariant semilinear semirelativistic equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Applied Mathematics Letters	6. 最初と最後の頁 107619 ~ 107619
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aml.2021.107619	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Kazumasa	4. 巻 -
2. 論文標題 Remark on the Chain rule of fractional derivative in the Sobolev framework	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Math. Inequal. Appl.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Kazumasa, Ikeda Masahiro, Wakasugi Yuta	4. 巻 28
2. 論文標題 On the Cauchy problem for a class of semilinear second order evolution equations with fractional Laplacian and damping	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-021-00723-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fujiwara Kazumasa, Georgiev Vladimir	4. 巻 62
2. 論文標題 On global existence of L^2 solutions for 1D periodic NLS with quadratic nonlinearity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 091504 ~ 091504
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0033101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D' Abbicco M., Fujiwara K.	4. 巻 202
2. 論文標題 A test function method for evolution equations with fractional powers of the Laplace operator	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 112114 ~ 112114
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2020.112114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujiwara Kazumasa, Georgiev Vladimir, Ozawa Tohru	4. 巻 268
2. 論文標題 Self-similar solutions to the derivative nonlinear Schrödinger equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 7940 ~ 7961
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2019.11.089	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fujiwara Kazumasa, Georgiev Vladimir, Ozawa Tohru	4. 巻 136
2. 論文標題 On global well-posedness for nonlinear semirelativistic equations in some scaling subcritical and critical cases	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal de Mathématiques Pures et Appliquées	6. 最初と最後の頁 239 ~ 256
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2019.10.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計20件 (うち招待講演 20件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 Lifespan estimate for classical damped wave equations with some initial data
3. 学会等名 京都大学NLPDEセミナー (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 Lifespan estimate for classical damped wave equations with some initial data
3. 学会等名 鳥取PDE研究集会2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 Lifespan estimate for classical damped wave equations with some initial data
3. 学会等名 ICIAM 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 或る初期値に対する消散型波動方程式の爆発時刻の評価
3. 学会等名 京都駅前セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Fujiwara Kazumasa, Vladimir Georgiev
2. 発表標題 Necessary and sufficient condition of L^2 global existence for a periodic nonlinear Schrödinger equation
3. 学会等名 Webinar Critical exponent versus blow-up in evolution models（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Fujiwara Kazumasa, Vladimir Georgiev
2. 発表標題 Remark on the lifespan of semilinear classical damped wave equation
3. 学会等名 Analysis Seminar Pisa University（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Fujiwara Kazumasa, Vladimir Georgiev
2. 発表標題 A lifespan estimate for semilinear classical damped wave equations
3. 学会等名 Geometric Analysis in Harmonic Analysis and PDE（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Fujiwara Kazumasa, Vladimir Georgiev
2. 発表標題 或る初期条件に対する半線型消散型波動方程式の存在時刻の評価
3. 学会等名 名古屋大学多元数理科学研究科談話会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Fujiwara Kazumasa, Vladimir Georgiev
2. 発表標題 或る初期条件に対する半線型消散型波動方程式の存在時刻の評価,
3. 学会等名 第3回大同大学若手セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Fujiwara Kazumasa, Vladimir Georgiev
2. 発表標題 A lifespan estimate for classical damped wave equations with some initial data
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Fujiwara Kazumasa, Vladimir Georgiev
2. 発表標題 Necessary and sufficient condition for global existence of L^2 solutions for 1D periodic NLS with non-gauge invariant quadratic nonlinearity
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 On a test function method with fractional derivatives
3. 学会等名 第5回 反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 Remark on chain rules in the Sobolev framework
3. 学会等名 Nonlinear Wave Equations (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 Necessary and sufficient condition for global existence of L2 solutions for 1D periodic NLS with non-gauge invariant quadratic nonlinearity
3. 学会等名 第46回偏微分方程式論札幌シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 周期境界条件に於ける絶対値冪乗型の非線形項を有するシュレーディンガー方程式に対する 時間大域可解性の為の自乗可積分な初期状態の必要充分条件
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 A sufficient and necessary condition for blow-up of non-gauge invariant nonlinear periodic Schrödinger equations
3. 学会等名 第 721 回 応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 Necessary and sufficient condition for global existence of L^2 solutions for 1D periodic NLS with non-gauge invariant quadratic nonlinearity
3. 学会等名 京都大学 NLPDE セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 Necessary and sufficient condition for global existence of L^2 solutions for 1D periodic NLS with non-gauge invariant quadratic nonlinearity
3. 学会等名 第10回室蘭非線形解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 周期境界条件に於ける絶対値冪乗型の非線形項を有するシュレーディンガー方程式に対する 時間大域可解性の為の自乗可積分な初期状態の必要充分条件
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤原和将
2. 発表標題 Necessary and sufficient condition of L^2 global existence for a periodic nonlinear Schrödinger equation
3. 学会等名 Webinar Critical exponent versus blow-up in evolution models (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

藤原和将のホームページ https://fujiwara-kazumasa.math.ryukoku.ac.jp/home_j.html
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Mathematical Analysis of Nonlinear Dispersive and Wave Equations	開催年 2022年～2022年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
イタリア	Pisa大学		