

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14338

研究課題名（和文）新たな構造の解空間を用いた運動論方程式の解の諸性質に関する研究

研究課題名（英文）Study of properties of solutions to kinetic equations via solution spaces with new structures

研究代表者

坂本 祥太（Sakamoto, Shota）

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：10869019

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究においては非切断ボルツマン方程式の定常解周りの初期値問題および境界値問題の解析を行った。特に、解のノルムがフーリエ変換の可積分性で特徴づけられる関数空間を用いてこれまでの解空間とは様相の異なる時間大域解について考察することができた。先行研究においては解の空間変数に関する関数空間としてソボレフ空間やベゾフ空間を用いていたが、これらは L 無限空間に埋め込めるような指数の組み合わせで用いられた。フーリエ変換の可積分性によって関数を特徴づけることにより、このような埋め込みなしで方程式の解を構成することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、関数のフーリエ変換の可積分性によって特徴づけられる関数の空間を非切断ボルツマン方程式の解の解析に用いた。様々な関数空間において方程式を考察することは、遠方で十分早く0に減衰する解や(形式的に)無限大の質量をもつような系における方程式の解など、様々な物理的背景に応じた解を考察することにつながる。従って上述したような関数空間の利用により、この方程式に対して新たな現象に対応しうる結果を導出することができたため、方程式が持つ解の特性を新たにとらえるための知見が得られた。

研究成果の概要（英文）：We studied an initial value and initial-boundary value problem of the non cut off Boltzmann equation near the global equilibrium. In particular, solutions are characterized by integrability of their Fourier transform.

In the known results, solution spaces such as Sobolev or Besov spaces that can be embedded into the L infinity space were employed in order to control nonlinear estimates. New solution spaces were utilized so that we can complete estimates without such embedding theorems.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：運動論方程式 ボルツマン方程式 ランダウ方程式 解の存在と一意性 正則性

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究申請時においては、非切断ボルツマン方程式の初期値問題の研究に用いられる関数空間は、空間変数に関して言えばソボレフ空間やベゾフ空間が主であった。これらのうちで特に2乗可積分な関数全体のクラスである L^2 空間を用いて定義されるものが利用された理由は、 L^2 がヒルベルト空間でありエネルギー法との相性がよいことによる。

しかし非線形項の3重線形評価においては、 L^2 空間を基に関数の積の積分評価を行うと、少なくとも一つの関数は殆ど至る所有有限関数のクラスである L^∞ 無限空間のノルムを用いて評価しなくてはならない。この評価のため、 L^2 を用いて定義されるソボレフ空間やベゾフ空間が L^∞ 無限に埋め込まれるだけの高い正則性を持った空間を用いることが重要であった。

一方、フーリエ級数の絶対総和可能性を用いて特徴づけられるウィーナー空間は、結晶のエピタキシャル成長を記述する数理モデルの解析などに既に用いられていたが、この数理モデルは非線形な放物型方程式である。放物型方程式に特徴的な解の平滑化効果が先述の空間で確認されている非切断ボルツマン方程式に対しても、これらの関数空間を用いることができ、しかも解空間の構造の違いからこれまで発見されなかったような解に対する考察が可能であると考えられた。

2. 研究の目的

本研究では上記で述べた、トーラス上で定義されるウィーナー空間や、その全空間版であるフーリエ変換が可積分である関数のクラスを空間変数に対して用いて解空間を設定し、非切断ボルツマン方程式の初期値問題や初期値境界値問題の解の一意存在などの性質について考察することである。関数空間の埋め込みの性質の違いから、これらの空間は先行研究で用いられたソボレフ空間やベゾフ空間の基となる L^2 空間よりも、本質的に有界な関数のクラスである L^∞ 無限空間にある種の正則性を課したクラスであるとみなすほうが自然である。であれば、これらの関数空間を用いて解を構成すれば、先行研究で研究されていた解のクラスとは全く異なるクラスにおける方程式の性質を調べることができると期待される。

さらに、ウィーナー空間やフーリエ変換が可積分な空間はそれらが用いられた別の方程式における研究では解の正則性を同時に研究するためにも用いられている。同様の手法を非切断ボルツマン方程式に対しても応用することも目的である。

3. 研究の方法

非切断ボルツマン方程式及びランダウ方程式の定常解周りの初期値および初期値境界値問題をトーラス上(境界条件付きの場合一方向だけ境界条件を与える)を考える。この場合ウィーナー空間(境界条件付きの場合その方向には L^2 空間)を用いて解を特徴づけるため、この空間を用いた解のアプリオリ評価を導出する。方程式の線形部分の準強圧の評価や非線形部分の3重線形評価には、先行研究において開発されたいわゆるトリプルノルム(cf. Alexandre et al., *Kinet. Relat. Models*, 2023)を用いた評価と新しい関数空間と組み合わせると必要な評価が導出される。準強圧の評価で制御できない部分は、方程式が持つ保存則から流体方程式型の系を導出し、これにアプリオリ評価を行う。これらの結果を組み合わせると解に対する総合的なアプリオリ評価が得られる。局所解をハーン・バナッハの定理により構成し、アプリオリ評価と合わせて時間大域解を構成する。

4. 研究成果

3. で述べた手法を活用して、トーラス上でウィーナー空間を用いて解の一意存在と解の時間減衰評価を導出した(Duan et al., *Comm. Pure Appl. Math.*, 2021)。これはボルツマン・ランダウ双方、また初期値・初期値境界値問題双方に対して統一的な解析手法を開発したうえで、新たな解空間における問題を提唱した点が高く評価され、分野内においては引用件数の多い論文となった。また比較的最近、同様の手法を全空間上のボルツマン方程式に適用して解の一意存在と時間大域的挙動を導出した(Duan et al., *SIAM Journal Math. Anal.*, 2024)。トーラス上の問題と比較すると、全空間上の問題は保存則の効果が弱いためトーラス上では制御できていた

が全空間では制御できない部分が見れる。この評価のために、フーリエ変換が L_p であるクラスを導入し、この空間におけるエネルギー評価と解を考察する空間における時間重み付きエネルギー評価を組み合わせることで所望の定理を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Duan Renjun, Sakamoto Shota, Ueda Yoshihiro	4. 巻 56
2. 論文標題 An $L^1_k \cap L^p_k$ Approach for the Non-Cutoff Boltzmann Equation in \mathbb{R}^3	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 762 ~ 800
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/22M1533232	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Duan Renjun, Liu Shuangqian, Sakamoto Shota, Strain Robert M.	4. 巻 74
2. 論文標題 Global Mild Solutions of the Landau and Non-Cutoff Boltzmann Equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications on Pure and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 932 ~ 1020
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/cpa.21920	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 9件/うち国際学会 7件）

1. 発表者名 Shota Sakamoto
2. 発表標題 A Cauchy problem of the Boltzmann equation without angular cutoff near an equilibrium in low-regularity spaces
3. 学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shota Sakamoto
2. 発表標題 The stability of a solution to the Boltzmann equation in the 3D half-space
3. 学会等名 International Workshop on Recent Advances in Nonlinear PDEs（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shota Sakamoto
2. 発表標題 The well-posedness of the Boltzmann equation without angular cutoff in some Banach-algebra spaces
3. 学会等名 International Workshop on Multi-Phase Flows: Analysis, Modelling and Numerics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関