

令和 6 年 4 月 5 日現在

機関番号：13701

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14339

研究課題名（和文）多重線形擬微分作用素の有界性に関する研究

研究課題名（英文）Boundedness of multilinear pseudo-differential operators

研究代表者

加藤 睦也（KATO, Tomoya）

岐阜大学・工学部・准教授

研究者番号：40847026

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：擬微分作用素とは微分作用素の一般化であり、多重線形擬微分作用素とはそれを関数同士の掛け算に対する作用素へと拡張したものである。本研究では、作用素の有界性を保証するためのシンボルが満たすべき条件に着目し、既存の結果の改良、および、精密化を行なった。特に、シンボルに課される代表的な条件である遠点での減衰性をより一般の形に拡張し、さらに、シンボルの可微分性に関する条件も弱めることで、すでに知られていた有界性の結果を精密化することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では主に、 $S_{\{0,0\}}$ 型のシンボルをもつ多重線形擬微分作用素について考察を行った。このシンボルは、微分によって減衰度を変えないというものである。この作用素の有界性に関する結果は、2000年初頭にBenyiらによって始まり、2010年頃にMiyachi-Tomitaによって基本的な枠組みでの研究は完結していた。本研究によって、それらをさらに拡張したことで、今後の新たな研究の枠組みを作ることができたのだとしたら嬉しく思う。

研究成果の概要（英文）：Pseudo-differential operators are one of generalization of partial differential operators. Multilinear analogues are its extension to operating to products of functions, which have been studied extensively. In this research, we concentrated on generalizing conditions to assure the boundedness of multilinear pseudo-differential operators and tried to give improvement or refinement of known results. In particular, we extended conditions how fast symbols of the operators decay far from the origin to more general ones and also weaken derivative assumptions of symbols.

研究分野：実解析学

キーワード：擬微分作用素 フーリエ乗子作用素 多重線形作用素 関数空間

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

擬微分作用素とは微分作用素の一般化であり、多重線形擬微分作用素とはそれを関数同士の掛け算に対する作用素へと拡張したものである。本研究では、その有界性を考察する。特に、作用素の有界性を保証するためのシンボルが満たすべき条件に着目し、既存の結果の改良、および、精密化を目指す。シンボルに課される条件としては遠点での減衰条件が代表的であるが、その改良を行い、同時に、シンボルの可微分性に関する条件も弱めることで精密化を行いたいと考えた。

2. 研究の目的

ヘルマンダーの $S_{\{0,0\}}$ クラスに属すシンボルに対して、その多重線形擬微分作用素のルベーク空間における有界性は、現在までに数多くの研究者によって調べられている。このクラスは、関数とその導関数がどのくらいの速さで減衰(もしくは増大)するかを記述するクラスである。また、有界性が成り立つための最適な減衰条件もすでに決定されている。

本研究では、 $S_{\{0,0\}}$ クラスをより広いクラスへと拡張し、そのクラスに対する多重線形作用素の有界性について考察する。これによって、減衰条件だけでなく、シンボルがどのような性質を満たせば、有界性が得られるのかを見ることが出来る。本研究ではさらに、有界性が成り立つためには、シンボルがどのような性質を満たしていなくてはならないかについても調べる。これによって、有界性とシンボルが満たすべき性質との特徴付けを行い、有界性の本質を理解する。

3. 研究の方法

本課題に先立って、 $S_{\{0,0\}}$ 型のクラスに対する多重線形擬微分作用素のルベーク空間上での有界性は、宮地晶彦氏、富田直人氏との共同研究により、 L^2 空間をベースとする場合には、「有界性の改良、シンボルクラスの拡張、シンボルの可微分性の精密化」の3点についての結果をすでに得ている。本課題ではその続きとして、 L^2 空間をベースしない部分での有界性についても同様のことが得られるのかを考察していきたい。さらに、 $S_{\{0,0\}}$ クラスのある種の一般化であるヘルマンダーの $S_{\{ \quad \}}$ クラス、 $0 < \alpha < 1$ 、についても考察を行う。ここでは、シンボルの可微分性の精密化に焦点を絞る。このことも既に L^2 空間をベースとする有界性での結果を得ているので、それ以外の部分でのことを進めていく。

4. 研究成果

2020 年度

1. ある滑らかな窓関数の線型結合に対する双線形フーリエマルチプレイヤー作用素に関して、その係数と $L^2 \times L^2$ 上の有界性との特徴付けを行った。
2. 双線形作用素の $L^p \times L^q$ から L^r への有界性を考えるとき、これらの指数には、 $1/p+1/q=1/r$ という関係式を仮定することが多い。この関係式はヘルダーの不等式に現れるものであり、自然な仮定である。しかし、ごく最近に、 $S_{\{0,0\}}$ 型の双線形ヘルマンダークラスの双線形擬微分作用素に対しては、この関係式が必ずしも必要ではないことがわかっている。本研究では、この事実は $S_{\{0,0\}}$ 型特有のものであって、一般の $S_{\{ \quad \}}$ クラス、 $0 < \alpha < 1$ 、では、この関係式が必ず必要であることを示した。
3. $S_{\{0,0\}}$ 型クラスの双線形擬微分作用素に関して、そのウィーナー・アマルガム空間上での有界性とシンボルクラスの重み関数との特徴づけを行なった。この結果は、ルベーク空間における有界性に対するある種の一般化、改良にもなっている。また、上記項目で述べた $S_{\{0,0\}}$ 型クラスに特有な事実も本研究の成果のうちの一つである。

2021 年度

1. ある滑らかな窓関数の線型結合に対する特別な場合の双線形フーリエマルチプレイヤー作用素に関して、その係数とアマルガム空間およびウィーナー・アマルガム空間上での有界性との特徴付けを明らかにした。この結果は、昨年度に得ていた $L^2 \times L^2$ での結果のある種の拡張となっている。
2. ヘルマンダーの $S_{\{0,0\}}$ 型シンボルクラスにおける多重線形擬微分作用素に関して、その局所ハーディ空間上での有界性について考えた。このクラスのシンボルは、すべての偏導関数が同じオーダーでの評価式をみたく。そして、その最適なオーダーは、線形の場合には古くから知られており、双線形の場合には、近年、宮地-富田などによって完全に決定された。ここでは、それらの結果を三重線形以上の場合にも拡張することができた。
3. 上記2において得られた有界性では、シンボルに非常に多くの微分可能性を仮定している。そこで、その滑らかさの仮定をどこまで弱められるのか、ということについても考えた。線形の場合には、ほとんど最適な結果が得られているのに対して、双線形以上の場合にはほとんど知られていない。ここでは、双線形以上の場合であっても、線形のものと同じくらいの微分可能性で十分であることがわかった。

2022 年度

1. Boulkhemair は 線形の擬微分作用素の L^2 空間上での有界性を示す際 Miyachi や Sugimoto などを用いられたベゾフ空間型のシンボルクラスよりもさらに広いクラスを導入した。昨年度の多重線形擬微分作用素におけるシンボルの滑らかさに関する成果では、そのシンボルクラスを土台としていたため、逆輸入的ではあるものの、その際に用いた Wiener アマルガム空間を応用する手法を使って、Boulkhemair の結果を局所ハーディ空間 hp 上 ($0 < p < \infty$) での有界性へと拡張しようと試みた。しかし、 $0 < p < 2$ の場合には満足いく結果が得られたものの $2 < p < \infty$ の場合にはシンボルの滑らかさに $-loss$ が生まれてしまい、最適どころまで届かなかった。
2. Hormander や Dos Santos Ferreira-Staubach などの結果によって、 $S_{\{0,0\}}$ クラスの線形のフーリエ積分作用素が L^2 空間上で有界となることはよく知られている。ただし、 $0 < \delta < 1$ を満たす指数である。ごく最近、Castro-Israelsson-Staubach によって、この結果は L^p -有界性 ($1 < p < \infty$) へと拡張されている。申請者は、この結果を $\delta = 0$ 、すなわち、 $S_{\{0,0\}}$ クラスの場合には hp -有界性 ($0 < p < \infty$) へとさらに拡張することはできた。しかし、 $0 < \delta < 1$ の場合の $S_{\{0,0\}}$ クラスに対してはまだ拡張できていない。

2023 年度

1. 2010 年頃の Grafakos-Peloso による論文を発端に、1 次斉次な相関数を振動項にもつ双線形フーリエ積分作用素に関する研究ははじまった。その後、Rodriguez-Lopez, Rule, Staubach らはいくつかの論文を経て、その研究をおおきく発展させた。彼らは双線形作用素を単純な 2 つの線形作用素の掛け算に分解し、線形作用素の有界性に帰着させることで、双線形フーリエ積分作用素の有界性を得ている。本研究では、双線形フーリエ積分作用素の典型例である波動作用素の場合について考え、2 つの掛け算をそのものとして扱うことで、彼らの結果を改良することができた。
2. 上記成果のシンプルな一般化として、Rodriguez-Lopez らが扱っていた直積型の振動項をもつ双線形フーリエ積分作用素の有界性について考えた。本研究では、一般の場合でも彼らの結果を改良できることを示した。ここでの本質的なアイデアは、成果 1 によるものであるため、詳細は省略する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kato Tomoya, Shida Naoto	4. 巻 52
2. 論文標題 A remark on the condition $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$ for boundedness of bilinear pseudo-differential operators with exotic symbols	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 285-300
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14492/hokmj/2021-539	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kato Tomoya	4. 巻 29
2. 論文標題 Multilinear Pseudo-differential Operators with $S_{\{0,0\}}$ Class Symbols of Limited Smoothness	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Fourier Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 #40
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00041-023-10016-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kato Tomoya, Miyachi Akihiko, Tomita Naohito	4. 巻 515
2. 論文標題 Boundedness of bilinear pseudo-differential operators of $S_{\{0,0\}}$ -type in Wiener amalgam spaces and in Lebesgue spaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 #126382
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2022.126382	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kato Tomoya	4. 巻 27
2. 論文標題 Bilinear Pseudo-Differential Operators with Exotic Class Symbols of Limited Smoothness	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Fourier Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 #54
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00041-021-09847-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kato Tomoya	4. 巻 B88
2. 論文標題 A remark on bilinear pseudo-differential operators with symbols in the Sj ∞ -oscillating class	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS K ∞ -ky ∞ -uroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 11-25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kato Tomoya, Miyachi Akihiko, Tomita Naohito	4. 巻 282
2. 論文標題 Boundedness of multilinear pseudo-differential operators with symbols in the H ∞ -oscillating class $S_{0,0}$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 #109329
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2021.109329	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kato Tomoya, Miyachi Akihiko, Tomita Naohito	4. 巻 12
2. 論文標題 Boundedness of bilinear pseudo-differential operators of $S_{\{0,0\}}$ -type on $L^2 \times L^2$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications	6. 最初と最後の頁 #15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11868-021-00391-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kato Tomoya, Miyachi Akihiko, Tomita Naohito	4. 巻 73(2)
2. 論文標題 Boundedness of multilinear pseudo-differential operators of $S_{\{0,0\}}$ -type in L^2 -based amalgam spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 351-388
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/83468346	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Kato Tomoya
2. 発表標題 ある双線形波動作用素の有界性について
3. 学会等名 第40回調和解析定例セミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Kato Tomoya
2. 発表標題 Multilinear pseudo-differential operators with limited smooth $S_{\{0,0\}}$ class symbols
3. 学会等名 The 14th ISAAC Congress（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kato Tomoya
2. 発表標題 Multilinear pseudo-differential operators with $S_{\{0,0\}}$ class symbols of limited smoothness
3. 学会等名 The MATRIX-RIMS Tandem Workshop on Geometric Analysis in Harmonic Analysis and PDE（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kato Tomoya
2. 発表標題 Multilinear pseudo-differential operators with $S_{\{0,0\}}$ class symbols of limited smoothness
3. 学会等名 The 19th Linear and Nonlinear Waves（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kato Tomoya
2. 発表標題 Boundedness of bilinear pseudo-differential operators of $S_{(0,0)}$ -type in Wiener amalgam spaces and in Lebesgue spaces
3. 学会等名 Harmonic Analysis and Wave Phenomena (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kato Tomoya
2. 発表標題 Boundedness of bilinear pseudo-differential operators of $S_{(0,0)}$ -type in Wiener amalgam spaces and in Lebesgue spaces
3. 学会等名 13th International ISAAC Congress (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 加藤睦也
2. 発表標題 Boundedness of multilinear pseudo-differential operators of the Hörmander class $S_{(0,0)}$ in Wiener amalgam spaces and in local Hardy spaces
3. 学会等名 調和解析・微分方程式勉強会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------