

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14342

研究課題名（和文）幾何学的対称性を用いた非線形波動・分散型方程式の解の挙動と特異性の解析

研究課題名（英文）Study on asymptotic behavior and singularities of solutions for nonlinear dispersive equations by using geometric symmetry

研究代表者

岡本 葵 (Mamoru, Okamoto)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：40735148

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,600,000円

研究成果の概要（和文）：非線形波動・分散型方程式の解の特異性や漸近挙動について研究を行った。レーザー・プラズマの相互作用を記述する非線形シュレディンガー方程式系の初期値問題の適切性について、逐次近似法を用いる限りほとんど最良な結果が得られた。また、散乱の意味で臨界な4階非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動を決定した。さらに、非線形波動方程式の初期値問題の非適切性を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線形項に微分を含む非線形シュレディンガー方程式において、逐次近似法を用いる限りほとんど最良な適切性を得ることができた。そこで培った手法により、非線形相互作用の制御手法の方針が得られた。また、漸近挙動を解明し、散乱の意味で臨界な状況における解の振る舞いを明らかにした。さらに、非適切性の証明により、解の特異性がいかに発生するかを詳細に調べることができた。

研究成果の概要（英文）：We study on the singularity and asymptotic behavior of solutions for the nonlinear dispersive equations. We obtain an almost sharp well-posedness result of the Cauchy problem for a system of nonlinear Schrodinger equations. We also study the asymptotic behavior of solutions for a fourth order nonlinear Schrodinger equation with critical nonlinearity in the sense of scattering. Moreover, we prove the ill-posedness of the Cauchy problem for the nonlinear wave equation.

研究分野：関数方程式論

キーワード：適切性

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

非線形波動・分散型方程式は、非線形波動方程式や非線形シュレディンガー方程式を含む非線形発展方程式の枠組みの 1 つである。線形項がもつ分散性と非線形項がもつ凝集性との関係性により、様々な現象が発生する。また、非線形偏微分方程式では、その非線形性のために、一般的な解析が困難である。特に、解の存在でさえ非自明であり、初期値問題の適切性は、基本的な問題である。本研究では、方程式が持つ幾何学的対称性に着目し、それを用いて特異性を制御する手法を進展させる。

### 2. 研究の目的

非線形波動・分散型方程式は、物理現象のモデルとして表れることが多い。そのため、エネルギーと呼ばれる保存量をもつだけでなく、物理背景により様々な対称性を有している。本研究では、非線形波動・分散型方程式において、そのような幾何学的対称性を用いて、どのような状況で解の特異性が発生するかを明らかにすると共に、解の挙動の解明を目指す。特に、方程式が幾何学的対称性をもつ場合に、その対称性を用いた強い相互作用を相殺することができるかどうかに着目して考察を行う。

### 3. 研究の方法

非線形波動・分散型方程式の初期値問題の適切性を考察し、非線形相互作用を詳細に把握する。特に、非線形波動方程式や非線形シュレディンガー方程式の初期値問題について、正則性の低い空間で考え、個々の非線形項がもつ性質を丁寧に観察する。初期値問題の適切性を証明することで、非線形性を制御する技術の向上を行う。さらに、非常に強い特異性が発生する場合には、適切性が破綻することもある。その場合には、非適切性の証明を行う。また、解の漸近挙動を考え、時間大域的な特異性の発生についても考察する。

### 4. 研究成果

(1) 非線形波動方程式の初期値問題の非適切を示した。ノルムインフレーションという強い意味で、解写像の連続性が破綻することを証明した。特に、負の指数をもつソボレフ空間では初期値問題が非適切となることを示し、適切性が得られている指数とのギャップを埋めることができた。さらに、初期値の正則性よりも解の正則性をどんなに下げたとしても、解写像の連続性が得られず、正則性の無限損失が生じることを示した。

(2) 確率効果を含む非線形消散型波動方程式の初期値問題について考えた。ホワイトノイズを含む場合に、適当な繰り込みを行わない場合には非自明な解が存在しないという自明性を示した。そのため、ホワイトノイズのような正則性の低い項を含む方程式を考える際には、適当な繰り込みが本質的に必要である。また、ノイズの影響が弱い場合には、滑らかな解の極限として、決定論的な方程式が表れ、ホワイトノイズの影響が表れないことを示した。

(3) ホワイトノイズを含む非線形波動方程式と非線形熱方程式との比較を行った。確率非線形熱方程式では、線形項がもつ平滑化作用により、ホワイトノイズを含む項に逐次近似を繰り返して実施することで、正則性が上がる。一方、確率非線形波動方程式では、逐次近似を繰り返したとしても、正則性が上がらず、確率非線形熱方程式との平滑化効果の表れ方が本質的に異なることを示した。

(4) 非線形項に微分を含む非線形シュレディンガー方程式系の初期値問題の研究を行った。通常のソボレフ空間においては、初期値問題が適切となる概ね最良のソボレフ指数が知られていた。初期値に球対称性を課すことで、特異性の相殺が起こり、初期値問題が適切となる指数が広がることを証明した。特に、空間 3 次元では、尺度臨界空間における適切性と解の散乱が得られることを示した。

(5) 非線形項に微分を含む非線形シュレディンガー方程式系において、非線形ルーマス・ホイットニー型不等式を用いて、角度に応じた相互作用を精密にとらえることに成功した。先行研究では、適切性の指数にギャップが生じていたが、そのギャップをほとんど埋めることができた。特に、初期値問題が適切性に関して、逐次近似法を用いる限りはほとんど最良なソボレフ指数が得られた。

(6) 4 階非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動を得た。非線形項が 4 次で微分を 1 つ含む場合は、解は通常の意味では散乱しないことが知られていた。本研究では、漸近形に非線形項

の影響をもつ修正散乱が起こることを示した。特に、漸近形の主要部は、自己相似解で与えられることを示した。さらに、振動成分が主要部になる時空間領域があることを示し、その領域での主要部は線形解になることを示した。

(7) 2次の非線形項をもつ非線形シュレディンガー方程式の初期値問題の研究を行った。初期値に角度方向の正則性を課すことで、通常のソボレフ空間よりも広い空間において適切性が得られることを示した。特に、非線形項に応じた修正を施したフーリエ制限ノルム空間を用いて、初期値問題の適切性が得られた。さらに、非適切性も示し、この研究で得られた結果の最良性を証明した。

(8) 非線形波動方程式について、ギブス測度に台をもつ初期値に摂動を加えた解の振る舞いを調べた。初期値を合成積により平滑化して近似を考える場合には、解の振る舞いは制御できて、近似解は、ギブス測度に台をもつ関数を初期値とする解に収束することを示した。一方、一般の摂動を考えた際には、対応する解においてノルムインフレーションが起こり、収束しないことを示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 9件）

1. 著者名 Hirayama Hiroyuki, Kinoshita Shinya, Okamoto Mamoru	4. 巻 21
2. 論文標題 A remark on the well-posedness for a system of quadratic derivative nonlinear Schrodinger equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications on Pure and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 3309 ~ 3334
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2022101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Okamoto Mamoru, Uriya Kota	4. 巻 21
2. 論文標題 Long-time behavior of solutions to a fourth-order nonlinear Schrodinger equation with critical nonlinearity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 4897 ~ 4929
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-021-00737-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hirayama Hiroyuki, Kinoshita Shinya, Okamoto Mamoru	4. 巻 499
2. 論文標題 Well-posedness for a system of quadratic derivative nonlinear Schrodinger equations in almost critical spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 125028 ~ 125028
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2021.125028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Oh Tadahiro, Okamoto Mamoru	4. 巻 26
2. 論文標題 Comparing the stochastic nonlinear wave and heat equations: a case study	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/20-EJP575	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Forlano Justin, Okamoto Mamoru	4. 巻 17
2. 論文標題 A remark on norm inflation for nonlinear wave equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Dynamics of Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 361 ~ 381
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/DPDE.2020.v17.n4.a3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hirayama Hiroyuki, Kinoshita Shinya, Okamoto Mamoru	4. 巻 21
2. 論文標題 Well-Posedness for a System of Quadratic Derivative Nonlinear Schrodinger Equations with Radial Initial Data	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 2611 ~ 2636
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-020-00931-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Oh Tadahiro, Okamoto Mamoru, Robert Tristan	4. 巻 130
2. 論文標題 A remark on triviality for the two-dimensional stochastic nonlinear wave equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 5838 ~ 5864
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spa.2020.05.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hirayama Hiroyuki, Kinoshita Shinya, Okamoto Mamoru	4. 巻 395
2. 論文標題 Sharp well-posedness for the Cauchy problem of the two dimensional quadratic nonlinear Schrodinger equation with angular regularity	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 181 ~ 222
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2024.02.037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tadahiro Oh, Mamoru Okamoto, Nikolay Tzvetkov	4. 巻 -
2. 論文標題 Uniqueness and non-uniqueness of the Gaussian free field evolution under the two-dimensional Wick ordered cubic wave equation	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Ann. Inst. Henri Poincare Probab. Stat.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計21件 (うち招待講演 16件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 岡本葵, Tadahiro Oh, Nikolay Tzvetkov
2. 発表標題 Gauss型の初期値をもつ非線形Klein-Gordon方程式のほとんど確実な解について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 Uniqueness of the Gaussian free field evolution under the Wick ordered nonlinear Klein-Gordon equation
3. 学会等名 New trends in nonlinear dispersive equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 On the solutions to the two-dimensional Wick ordered nonlinear Klein-Gordon equation
3. 学会等名 The 41th Kyushu Symposium on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 Stochastic quantization of the $\Phi^3$ -model
3. 学会等名 Nonlinear and Random Waves (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 On the $\Phi^3$ measure
3. 学会等名 the 42nd conference on Stochastic Processes and their Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 $\Phi^3$ -測度について
3. 学会等名 信州若里数理解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 2次の非線形項を持つ非線形Schrodinger方程式の初期値問題の適切性について
3. 学会等名 Dispersive and wave equations (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 2次の非線形項をもつ非線形Klein-Gordon方程式のほとんど確実な大域的適切性
3. 学会等名 広島数理解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 平山浩之、木下真也、岡本葵
2. 発表標題 2次の非線形項をもつ2次元非線形Schrodinger方程式の角度正則性を課したSobolev空間での適切性
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 Stochastic quantization of the $\varphi^3_3$ -model
3. 学会等名 Rigorous statistical mechanics and related topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 Almost sure global well-posedness for the quadratic nonlinear Klein-Gordon equation
3. 学会等名 第13回 名古屋微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2022年



1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 空間3次元における非線形Klein-Gordon方程式のほとんど確実な大域的適切性
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 微分型非線形Schrodinger方程式系のほとんど最良なSobolev空間における適切性
3. 学会等名 第57回南大阪応用数学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 非線形 Klein-Gordon 方程式のほとんど確実な大域的適切性
3. 学会等名 神戸大学解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 吸引的なHartree型 $\Psi^4_3$ 量子場モデルの不変測度とその流れ
3. 学会等名 Saga Workshop on Partial Differential Equations（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 球対称な初期値を持つ微分型非線形Schrodinger方程式系の適切性
3. 学会等名 第16回 非線型の諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 Almost sure global well-posedness for the focusing nonlinear wave equation with a Hartree-type nonlinearity
3. 学会等名 Oberseminar Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 吸引的なHartree型 $\Psi^4_3$ 測度と非線形波動方程式のほとんど確実な大域的適切性
3. 学会等名 微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岡本葵, Tadahiro Oh, Leonardo Tolomeo
2. 発表標題 吸引的なHartree型非線形波動方程式のほとんど確実な大域的適切性
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平山浩之, 木下真也, 岡本葵
2. 発表標題 微分型非線形シュレディンガー方程式系の適切性に対する最良ソボレフ指数について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Justin Forlano, 岡本葵
2. 発表標題 非線形波動方程式の初期値問題の非適切性について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Stochastics and Nonlinear Partial Differential Equations	開催年 2022年 ~ 2022年
--	----------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	Univ. of Edinburgh			
ドイツ	Univ. Bielefeld			
フランス	Ecole Normale Superieure de Lyon			