

令和 6 年 6 月 2 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14343

研究課題名（和文）動的変分問題に対する新しいフェイズフィールド法の構成

研究課題名（英文）Construction of new phase field methods for dynamical problems in the calculus of variations

研究代表者

高棹 圭介 (Takasao, Keisuke)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：50734472

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：平均曲率流方程式等の曲面の発展方程式の数学解析を行い、以下の結果を得た。平均曲率流方程式の障害物問題に対し、障害物の境界がある程度滑らかであるときに、Brakke flowと呼ばれる弱解の時間大域存在を示した。弱解の構成には、外力項付きAllen-Cahn方程式を用いた。体積保存平均曲率流方程式に関して、任意の空間次元における弱解の時間大域存在を示した。弱解の構成には新しいフェイズフィールドモデルを考案し用いた。また、Epshteyn-Liu-Mizunoによって提唱された金属結晶の焼きなましにおける結晶粒界の運動方程式の古典解の時間局所存在等の性質を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

平均曲率流方程式等の曲線、曲面の発展方程式の解の近似方法の一つとして知られるフェイズフィールド法は、体積保存条件や外力項を加えることが容易であり、数値実験の分野で良く用いられている。しかし、フェイズフィールドモデルの特異極限が元の発展方程式に収束するか？という問題については、平均曲率流方程式の障害物問題や、任意の空間次元における体積保存平均曲率流方程式については未解決であった。本研究ではこれらの収束に関して数学的な正当性を与えた。Epshteyn-Liu-Mizunoの方程式については、金属粒界でよく見られる、トリプルジャンクションの形状を持つ解の時間局所存在を示すことが出来た。

研究成果の概要（英文）：We studied the surface evolution equations and obtained the following. We proved the global existence of the Brakke flow of the obstacle problem, when the boundaries of obstacles are smooth. We used the Allen-Cahn equation with forcing term for the proof. We showed the global existence of the weak solution to the volume preserving mean curvature flow for any dimensions. For the proof, we used a new phase field model for the volume preserving mean curvature flow. We proved the short time existence of the classical solution to the geometric evolution equation studied by Epshteyn-Liu-Mizuno.

研究分野：非線型偏微分方程式

キーワード：平均曲率流方程式 幾何学的測度論 フェイズフィールド法 変分問題 弱解 パリフォルド

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の主な研究対象は、平均曲率流方程式をはじめとする曲面の運動方程式である。平均曲率流方程式は、金属の焼きなましにおける金属粒界の動的モデル方程式として導出された非線形偏微分方程式である。その解である平均曲率流は曲面積をエネルギーとする L^2 勾配流とみなすこともでき、平均曲率流方程式は曲面の運動方程式の代表例といえるものである。平均曲率流方程式の弱解(広義解)の構成方法はいくつか知られており、Brakke の時間離散による近似法、レベルセット法、BMO アルゴリズム、elliptic regularization、minimizing movement、そして本研究で主に扱うフェイズフィールド法等がある。

フェイズフィールド法の特長の1つとして、平均曲率流方程式の近似で用いる Allen-Cahn 方程式が半線形熱方程式で数学的に扱いやすく数値計算にも適していることが挙げられる。Allen-Cahn 方程式に外力項を加えた場合は、その特異極限として外力項付きの平均曲率流方程式の弱解が得られることが予想でき、幅広い応用が期待できるが、この予想は後述の空間次元が4以上の体積保存平均曲率流や、平均曲率流の障害物問題に関しては未解明であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、曲面の運動方程式の解(弱解、古典解)の構成、特にフェイズフィールド法の発展である。フェイズフィールド法による弱解の構成のためには、(A)「解のディリクレエネルギーとポテンシャルエネルギーが特異極限で一致」することや、(B)「曲面の枚数に相当する関数(multiplicity function)が整数値を取る」ことを示す必要が有る。また、(B')「multiplicity functionの値が1」という性質を持つ Brakke flow(平均曲率流方程式の弱解の1つ)には、Brakke、Kasai-Tonegawa らによる正則性定理が適用できるため、この性質も重要である。

本研究では、以下の方程式について研究した。特に(1)、(2)については、(A)、(B)、(B')の解明を行い、この性質を用いて弱解の構成を試みた。

(1)平均曲率流方程式の障害物問題

平均曲率流方程式の障害物問題とは、平均曲率流方程式の解である曲面が、障害物によって動きが制限される問題である。楕円型方程式等において障害物問題は良く知られた問題ではあるものの、平均曲率流方程式の障害物問題は近年盛んに解析されている研究トピックである。先行研究では、粘性解と呼ばれる弱解の存在は得られていたものの、フェイズフィールド法による弱解の構成については未解決であった。

(2)体積保存平均曲率流方程式

平均曲率流方程式の解は、自身の曲面積を減らすように動くため、初期値が球のような形状であれば、有限時刻で消滅する。それに対し体積保存平均曲率流方程式は、平均曲率流に対して曲面に囲まれる領域の体積が常に一定であるという制限を加えた方程式である。体積保存平均曲率流方程式は、初期値が十分球面に近ければ、解が時間大域存在し球面に収束することが知られている。曲面が細胞膜であるような数理モデルを考察する場合、体積保存条件を課すことは自然であり、そのようなモデル方程式を単純化した体積保存平均曲率流方程式の解析は数学解析の第一歩として極めて重要である。先行研究では研究代表者によって、空間次元が2、3のときの弱解の時間大域存在がフェイズフィールド法によって得られていた(2017年の結果)が、空間次元が4以上の場合は未解決であった。

(3) Epshteyn-Liu-Mizuno の結晶粒界の運動方程式

平均曲率流方程式は金属の焼きなましの現象から得られたモデル方程式であるが、その解である曲面の運動はその平均曲率にのみ依存する。しかし、実際の焼きなまし現象における粒界の運動は、隣り合う金属粒同士の方位差にも影響されると考えられる。この効果を加えたモデル方程式が近年 Epshteyn-Liu-Mizuno によって得られた。この方程式について、解の存在等の基本的な性質は、初期値がトリプルジャンクションと呼ばれる形状である場合は未解決であった。この問題について、研究協力者の水野将司氏(日本大学)、可香谷隆氏(室蘭工業大学)との共同研究を行った。

3. 研究の方法

(1)については、Mercier-Novaga(2015)の先行研究を参考にした。彼らのアイディアは、曲面が障害物に接触した際に、障害物の外に曲面を押し出すように外力を与えるというものである。本研究では、このような効果が見込まれる外力項を Allen-Cahn 方程式に与え、その特異極限が平

均曲率流方程式の障害物問題の弱解になることを示すことにした。2022 年度からは、研究協力者の Katerina Nik 氏(University of Vienna (研究期間中、現在は Delft University of Technology))と共同研究を行い、本研究の推進を図った。

(2)については以下のように研究を行った。体積保存条件を Allen-Cahn 方程式に与えると、方程式の中に非局所項(積分項)が現れる。研究代表者による先行研究では、体積保存条件付きの Allen-Cahn 方程式として Golovaty(1997)が提案したものを採用し、(A)、(B)、(B')の証明には Röger-Schätzle(2006)の結果を用いている。任意の空間次元で(B)を証明するには、方程式のリスケーリングによる解析が必要である。Golovaty によるモデル方程式は、体積保存平均曲率流方程式の近似方程式としては良いエネルギー評価を持っているものの、非局所項が解の 2 階微分を含む関数の空間積分で表されるため、方程式にリスケーリングを施した際に困難が生じる。これに対して、本研究ではより数学的に扱いやすい近似方程式を提案し弱解の構成を試みた。

(3)については以下のように研究を行った。トリプルジャンクションを初期値とする曲率流の数学解析については多くの先行研究がある。研究協力者の水野将司氏(日本大学)、可香谷隆氏(室蘭工業大学)と共同研究を行い、これらの先行研究の精査をし、Epshteyn-Liu-Mizuno のモデル方程式においても先行研究と同様のエネルギー評価、古典解の存在、一意性、漸近挙動等の性質が得られるか、数学解析を行った。

4. 研究成果

(1)については以下の 2 つの結果を得た。(a)全空間を 2 次元または 3 次元のトーラス、障害物の境界を $C^{1,1}$ 級としたとき、平均曲率流方程式の障害物問題に対し、フェイズフィールド法を用いて Brakke flow(弱解)の時間大域存在を示した。(A)、(B)、(B')については、(B')以外は殆ど至る所の時刻について示したが、(B')についてはある時刻 T までの殆ど至る所の時刻について示した。この(A)、(B)、(B')の証明については、Allen-Cahn 方程式の外力項として L^2 評価が得られるようなものを選ぶことによって、Röger-Schätzle(2006)の結果を用いて示すことが出来た。弱解が障害物の内側に侵入しないという性質の証明には、障害物に相当する、外力項付き Allen-Cahn 方程式の劣解、優解を用いた。この研究で得られた劣解、優解は簡素なものであり、見通しの良い証明を与えることができた。この結果は 2021 年に単著論文として査読付き国際紙に掲載された。

(b) Katerina Nik 氏と共同研究で、(a)の弱解の時間大域存在の結果を任意の空間次元、かつ有界領域におけるノイマン境界条件下で証明した(但し、解である曲面が障害物や領域の境界に接しているときは、(B)、(B')は未解決である)。一般の空間次元においては、前述の Röger-Schätzle の結果は用いることが出来ない。また、(A)の証明には Allen-Cahn 方程式に対する Huisken の単調性公式とそれを用いた評価が必要である。これに対し本研究では、領域の内部では外力項付き Allen-Cahn 方程式に対する単調性公式を用いて、領域の境界付近では外力項が消えることから Kagaya(2019)の先行結果を用いて解決した。(a)で用いた劣解、優解は全空間で定義される為、有界領域では用いることが出来ない。これに対して有界な領域でも適用できる新たな劣解、優解を構成した。この結果は Nik 氏との共著として論文にまとめ、現在投稿中である。

(2)については、全空間を 2 次元以上のトーラスとしたときに、体積保存平均曲率流方程式の弱解(L^2 -flow)の時間大域存在を示した。弱解の構成には、本研究で新しく導入された非局所項付き Allen-Cahn 方程式を用いた。この新しい Allen-Cahn 方程式は、体積保存条件の代わりに、初期時刻における体積と、時刻 t における体積の差をペナルティとして方程式のエネルギーに取り入れたものである(体積保存条件をこのようなペナルティとして取り入れた先行研究としては、Mugnai-Seis-Spadaro(2016)の minimizing movement に対するものや、Kim-Kwon(2020)の粘性解に対するものが知られている)。この新しいフェイズフィールドモデルには主に以下の数学的な利点がある。(i)Golovaty のフェイズフィールドモデルと同様に、非局所項の時間に関する L^2 評価が得られる。(ii)方程式に放物型リスケーリングを施すと、特異極限で L^∞ ノルムの意味で非局所項が消滅する。(i)については先行研究と同様の方法で得ることが出来るが、(ii)は Golovaty のモデル等では得られていなかった性質である。本研究では、この性質(ii)によって(B)を解決し、任意の空間次元における時間大域存在を示すことができた。(A)、(B)、(B')については、(1)の(a)と同様に、(B')以外は殆ど至る所の時刻について示したが、(B')については、測度論の意味で初期値が十分球面に近いという仮定の下で、ある時刻 T までの殆ど至る所の時刻について示した。これにより、時刻 T までは、得られた L^2 -flow の意味での解は、BV 関数の意味で超関数解になっていることも示した。この結果は 2023 年に単著論文として査読付き国際紙に掲載された。

(3)については、初期値が前述のトリプルジャンクションと呼ばれる形状の場合において、時間局所解の存在と、初期値が定常解に近い場合における解の時間大域存在及び漸近挙動を示した。本結果は水野氏、可香谷氏との共著として論文にまとめ、査読付き国際紙に掲載予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Takasao Keisuke	4. 巻 247
2. 論文標題 The Existence of a Weak Solution to Volume Preserving Mean Curvature Flow in Higher Dimensions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Archive for Rational Mechanics and Analysis	6. 最初と最後の頁 53 pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00205-023-01881-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Mizuno Masashi、Takasao Keisuke	4. 巻 23
2. 論文標題 A curve shortening equation with time-dependent mobility related to grain boundary motions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Interfaces and Free Boundaries	6. 最初と最後の頁 169 ~ 190
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/IFB/453	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takasao Keisuke	4. 巻 53
2. 論文標題 On Obstacle Problem for Brakke's Mean Curvature Flow	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 6355 ~ 6369
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/21M1400432	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Keisuke Takasao	4. 巻 19
2. 論文標題 Existence of weak solution for mean curvature flow with transport term and forcing term	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications on Pure & Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 2655 ~ 2677
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/cpaa.2020116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshikazu Giga, Fumihiko Onoue, Keisuke Takasao	4. 巻 34
2. 論文標題 A varifold formulation of mean curvature flow with Dirichlet or dynamic boundary conditions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 21 ~ 126
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計24件 (うち招待講演 22件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 体積保存平均曲率流の弱解の時間大域存在について
3. 学会等名 鳥取 PDE 研究集会 2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Existence of weak solution to volume preserving mean curvature flow in higher dimensions
3. 学会等名 Geometry and Analysis Seminar -- Mini Workshop 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 フェイズフィールド法を用いた体積保存平均曲率流方程式の弱解の存在について
3. 学会等名 第13回「解析学とその周辺」@野田 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 On volume preserving mean curvature flow in higher dimensions
3. 学会等名 Kyoto-CAU Joint Meeting on Nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 任意の空間次元における体積保存平均曲率流方程式の弱解の存在について
3. 学会等名 2022年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 ある非局所項付きAllen-Cahn方程式を用いた体積保存平均曲率流の存在について
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 フェイズフィールド法による外力項付き平均曲率流方程式の弱解の存在について
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会, 実函数論分科会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 On obstacle problem for Brakke flow
3. 学会等名 北海道大学偏微分方程式セミナー, 北海道大学 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Existence of weak solution for mean curvature flow with forcing term
3. 学会等名 Workshop in Geometric Measure Theory and Applications, East China Normal University, Shanghai (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Phase field method for volume preserving mean curvature flow
3. 学会等名 Asia-Pacific Analysis and PDE Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 On obstacle problem for Brakke's mean curvature flow
3. 学会等名 第10回室蘭非線形解析研究会, 室蘭工業大学 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 On obstacle problem for Brakke's mean curvature flow
3. 学会等名 The 22nd Northeastern Symposium on Mathematical Analysis, Tohoku University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Phase field model for mean curvature flow with transport term and forcing term
3. 学会等名 第4回反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Phase field method for mean curvature flow and vanishing of discrepancy measure
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 調和解析と非線形偏微分方程式 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Phase field model for volume preserving mean curvature flow
3. 学会等名 東工大数理解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Convergence of Allen-Cahn equation with non-local term to volume preserving mean curvature flow
3. 学会等名 第48回偏微分方程式論札幌シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Phase field model for volume-preserving mean curvature flow
3. 学会等名 ICIAM 2023 Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Monotonicity formula of Allen-Cahn equations for surface evolution equations
3. 学会等名 Analysis, Geometry and Stochastics on Metric Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Phase field method for volume preserving mean curvature flow
3. 学会等名 第145回HMMCセミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 重み付き平均曲率流に対するフェイズフィールド法について
3. 学会等名 研究集会「広島微分方程式研究会」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Existence of weak solution to volume preserving mean curvature flow
3. 学会等名 金沢解析セミナー(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 フェイズフィールドモデルを用いた体積保存平均曲率流の弱解の存在について
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Existence of weak solution to volume preserving mean curvature flow
3. 学会等名 NCTS-Kyoto Mathematics Symposium(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Brakkeの平均曲率流の障害物問題
3. 学会等名 室蘭工業大学応用解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	水野 将司 (Mizuno Masashi)	日本大学・理工学部・准教授 (32665)	
研究協力者	可香谷 隆 (Kagaya Takashi)	室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授 (10103)	
研究協力者	N i k K a t e r i n a (Nik Katerina)	ウィーン大学・Faculty of Mathematics・University Assistant	2024年5月より、Delft University of Technologyへ異動。

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
オーストリア	ウィーン大学		