

令和 6 年 9 月 20 日現在

機関番号：24405

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14347

研究課題名（和文）渦輪の軌道安定性の解析

研究課題名（英文）Analysis on orbital stability of vortex rings

研究代表者

阿部 健（Abe, Ken）

大阪公立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：80748327

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：流体力学の基礎方程式であるオイラー方程式の初期値問題の適切性の研究において、渦輪は重要な特殊解である。本研究ではラムの双極渦、ヒルの球形渦輪などの厳密解を含む解のクラスで渦対、渦輪のオイラー方程式における軌道安定性定理を確立した。また磁場の方程式の視点を取り入れて3次元定常オイラー方程式の研究を行い、解の剛性、存在、安定性、自己相似性などについての研究成果を得た。これによりグラッド予想、テーラー緩和などのプラズマの問題とオイラー方程式における渦輪の安定性の問題の関係が明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

3次元オイラー方程式の定常解の安定性は60年代にアーノルドが安定性定理を与えているが、安定性定理の仮定をみだす定常解の例はこれまでに一つも知られていない。本研究はエネルギーカシミール法を用いて厳密解を含むクラスで軸対称旋回なし渦輪の安定性定理を確立した。さらにMHD方程式に対してもテーラー緩和に基づく磁場の安定性を示した。3次元オイラー方程式やMHD方程式における解の安定性定理を厳密解を含むクラスで確立できたことは学術的意義が大きい。また核融合炉設計の観点からも磁場の数学的安定性定理が確立できたことは社会的意義が大きい。

研究成果の概要（英文）：Vortex rings are important special solutions in the study of the well-posedness of initial value problems for the Euler equations, which are fundamental equations in fluid mechanics. In this study, we established the orbital stability theorems in the Euler equations for vortex pairs and vortex rings in a class of solutions that includes exact solutions such as Lamb's dipole vortex and Hill's spherical vortex ring. We also studied three-dimensional steady-state Euler equations by incorporating the viewpoint of magnetic field equations, and obtained mathematical results on their rigidity, existence, stability, and self-similarity of solutions. This clarified the relationship between plasma problems such as the Grad's conjecture and Taylor relaxation and the problem of vortex ring stability in the Euler equations.

研究分野：準線形偏微分方程式

キーワード：オイラー方程式 渦輪 軌道安定性 ベルトラミ場 MHD方程式

様式 C-19、F-19-1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

フェンとスベラック (ARMA, 2014) は渦糸を初期値とするナビエ・ストークス方程式の時間大域解を構成し、ナビエ・ストークス方程式の初期値問題の研究に大きな影響を与えた。この結果は一般の初期値に対しては得られていないスケール臨界空間における大きな初期値に対する時間大域解を軸対称解により構成した結果で、軸対称解が初期値問題の研究に重要であるだけでなく、渦運動と初期値問題の適切性の関係を明らかにした点でも画期的な研究である。非粘性流を記述するオイラー方程式の場合には、渦輪はヘルムホルツやケルビンなどにより古くから研究されており、進行波解の構成は70年代前半のフラエンケルの変分法による研究に遡る。一方でオイラー方程式の定常解の安定性についての研究は、運動エネルギーの臨界点の安定性を調べるアーノルドの安定性定理が知られているが、3次元の場合に定理の仮定をみたす定常解の例は一つも知られていない。水面波の方程式との類似から、3次元オイラー方程式における進行波解の安定性は方程式の適切性の問題と深く関係していると考えられる。

2. 研究の目的

本研究の目的は3次元オイラー方程式の初期値問題を動機として、オイラー方程式における渦輪の安定性を解明することであった。3次元軸対称回転なし渦輪は切断面においては符号の異なる二つの渦の並進運動であり、このような渦の並進運動は2次元の場合渦対と呼ばれる。渦対の安定性はバートン等 (CMP, 2013) による変分法を用いた安定性定理が得られていたが、重要な厳密解であるラムの双極渦の安定性は得られていなかった。そこでまず2次元の場合にラムの双極渦を含む渦対の安定性定理を確立し、その結果を用いて3次元の場合に軸対称回転なし渦輪の安定性定理を得ることを目指した。

オイラー方程式は軸対称回転なしクラスにおいては滑らかな初期値に対して時間大域一意解が存在する(研究期間中、ヘルダー連続な初期渦度をもつ軸対称回転なし初期値に対してオイラー方程式の後ろ向き自己相似爆発解が存在することがエルギンディ (Ann. Math., 2021) により証明された。) より一般の軸対称回転ありクラスにおいては滑らかな初期値に対しても解の爆発が予想されており、層状流の方程式である2次元非粘性ブジネスク方程式の場合も含めて、旋回と解の正則性の関係を解明することは流体方程式の研究における最重要研究課題の一つである。

研究開始当初目的としていた軸対称回転なし渦輪の安定性定理は研究期間中に得ることができたため、途中で課題を追加し軸対称回転あり渦輪の存在と安定性を調べることも研究目的とした。軸対称回転ありクラスに属する流れの流線は2次元流と本質的に異なり、定常解の存在、安定性以前に流線の構造自体未解明である。そこで3次元定常オイラー方程式の特殊解のクラスであるベルトラミ流に焦点を当て、その存在と安定性を調べることにした。

ベルトラミ流はオイラー方程式においてはカオスな流線を記述する定常解であるが、MHD 方程式においてはローレンツ力がゼロになるフォースフリー場と呼ばれる磁場で、磁力線の構造、安定性の研究において重要な研究対象である。フォースフリー場に関する定常オイラー方程式の問題は、プラズマの研究において応用数学者グラドが予想した「滑らかなベルヌーイ面を持つ定常オイラー方程式の解は強い対称性を持つものに限る」という剛性についての予想(グラド予想)である。フォースフリー場は比例関数が定数となる場合、磁力線は第一積分を持たず3次元的になるが、比例関数が非定数となる場合は第一積分を持つためベルヌーイ面を持つ解と似たような状況になる。本研究では比例関数が非定数となるフォースフリー場の剛性と存在も研究目的とした。

フォースフリー場はMHD 乱流において安定的な磁場の構造としても現れる。物理学者テラーは磁場がヘリシティを近似的に保存しながらフォースフリー場に緩和する過程をヴォルジャーの磁気エネルギー最小化原理を用いて説明した(テラー緩和)。オイラー方程式の場合軸対称回転あり渦輪は不安定になると考えられるが、テラー緩和に従えばMHD 方程式における(旋回あり)フォースフリー場は安定的な構造である。本研究ではオイラー方程式の定常解の安定性に加えて、テラー緩和に基づくMHD フォースフリー場の安定性を調べることも目的とした。特に重要であるのがアルヴェーン波をもつチャンドラセカールの非線形フォースフリー場の安定性である(図1参照)。

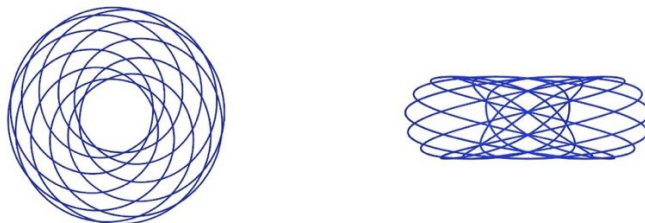


図1: チャンドラセカールの非線形フォースフリー場の磁力線

グラド予想、自己相似解と関係するのが、3次元定常オイラー方程式の拡大不変な解(斉次解)である。準線形方程式の自己相似解は第二種自己相似解と呼ばれ、半線形の場合(第一種)と異なりスケールを特徴付ける媒介変数は実数全体に分布する。本研究では3次元オイラー方程式と2次元非粘性ブジネスク方程式の第二種自己相似性を解明することも研究目的とした。

3. 研究の方法

大きく分けて以下の三つの項目について研究を進めた。

● 渦対, 軸対称旋回なし渦輪の安定性

フリードマンとトルキングトンによる変分法を用いた渦輪の構成方法(渦法)を渦対に対して適用することでエンストロフィー, 運動エネルギー, インパルス, 総渦量を用いて渦対をエネルギー最小化により構成した。軌道安定性の証明はコンセントレーションコンパクトネス法を用いた。制約条件が複数ある最小化問題においてはエネルギー最小値の劣加法性は一般には得られない。このためエネルギー最小解の存在と対称化の議論により直接非有界領域における最小化列のコンパクト性を示した。また平面移動の方法によりインパルスが小さい場合にエネルギー最小解の一意性を示すことでラムの双極渦の軌道安定性を示した。この方法は軸対称旋回なし渦輪に対しても適用可能である。

● フォースフリー場の存在, 剛性と安定性

優線形非線形項をもつグラドシャフラーノフ方程式に対してミニマックス法を適用し, ネハリ多様体上のエネルギー最小解によりベルトラミ場からなる軸対称旋回あり渦輪を構成した。非線形フォースフリー場の剛性については微分形式を用いて比例関数の等高面上の磁場の楕円型方程式を調べることにより剛性定理を得た。安定性についてはオイラー方程式の進行波の軌道安定性定理を基礎として, 軸対称旋回あり磁場の磁気エネルギー最小解の安定性を調べた。ベクトル値関数の最小化問題に対する最小化列のコンパクト性, ゼロ抵抗極限にける一般化平均ポテンシャルの保存の問題をコンセントレーションコンパクトネス法とリノーマライズド解などを用いることで示し, エネルギー最小解の安定性を示した。

● 斉次解の非存在と存在

3次元定常オイラー方程式と2次元定常非粘性ブジネスク方程式の斉次解の非存在を球面, 半弧上の方程式により調べた。また流れ関数に対する斉次グラドシャフラーノフ方程式, 斉次ドブレイルジャコティンロング方程式の解をミニマックス法により構成することにより, 斉次解の存在を示した。これにより自己相似性を特徴付ける媒介変数の実数直線上の存在, 非存在域の分布が明らかになった。

4. 研究成果

(1) ラムの双極渦の軌道安定性 (A-Choi, ARMA, 2022)

2次元オイラー方程式の進行波解に対する軌道安定性を渦度の2乗可積分ノルムに基づいてしました。この系としてチャプリギン(1903)とラム(1906)が発見した双極渦の明示解が2次元オイラー方程式において軌道安定であることを示した。この方法は軸対称旋回なし渦輪の安定性にも適用することが可能である。Choi (CPAM, 2024)は本研究手法に基づき3次元軸対称旋回なしクラスにおいて, 渦が不連続となるヒルの球形渦輪の安定性を示した。

(2) ベルトラミ流中における軸対称旋回あり渦輪の存在 (A, CMP, 2022)

比例係数が非定数となる場合のベルトラミ場をオイラー方程式の軸対称進行波解により構成した。非定数係数をもつベルトラミ場は速度場の空間無限遠方の減衰条件または比例関数の等高面についての条件に基づく強い剛性定理が知られている。本研究で構成した解は, これらの剛性定理の条件をみたさない非定数比例関数を持つベルトラミ場の例である。

(3) 非定数係数をもつベルトラミ場の剛性 (A, JMP, 2022)

全空間における非定数係数をもつベルトラミ場に対して比例関数が並行移動不変または回転不変で等高面がシリンダーまたはトーラスに同相ならば, 解は対称なものしかないことを等高面上の方程式と一意接続の原理を用いて示した。

(4) MHD 方程式におけるチャンドラセカール解の軌道安定性 (A, arXiv, 2022)

単連結有界領域におけるエネルギー最小のフォースフリー場(テラー状態)と全空間におけるチャンドラセカールの非線形フォースフリー場のMHD方程式における安定性をルレイホップ解の弱理想極限の枠組みで示した。有界領域の場合の結果はヘリシティーを用いたヴォルジャーの磁気エネルギー最小化の原理に基づく安定性で, 非有界領域における安定性のトイモデルである。また球の内部において3つのテラー状態が存在することをポロイダルトロイダル分解により示した。全空間の場合は磁気エネルギーが有限であってもヘリシティーは定義できないが, 軸対称解に対してはソレノイダルベクトル場に対するクレブシュ表示を用いて(ゲージ不変でない)一般磁気ヘリシティーが定まる。この一般磁気ヘリシティーを用いて磁気エネルギーを最小化することでエネルギー最小解の安定性が得られる。

(5) オイラー方程式の斉次解の存在 (A, ARMA, 2024)

3次元定常オイラー方程式の斉次解の存在と非存在について調べた。シブドコイ(TAMS, 2018)は(-) 斉次解は $0 \leq \beta \leq 2$ において存在しないことをベルトラミ場, 軸対称解に対して示したが, 本研究では補集合 $\beta < 0, 2 \leq \beta$ に対して(-) 斉次軸対称解の存在を示した。また $2 \leq \beta \leq 3$ に対してベルヌーイ面または比例関数の等高面が(アーノルドの構造定理に含まれない)記号 β を回転させた曲面になる斉次解が存在することを示した。

(6) 2次元非粘性ブジネスク方程式の斉次解の非存在と存在 (A-Ginsberg-Jeong, 準備中)

2次元半空間における非粘性ブジネスク方程式の斉次解の存在と非存在を調べた。(-) 斉次解は $-1/2 \leq \beta \leq 1$ ならば存在せず, $\beta < -1, 1 \leq \beta$ ならば存在することを半弧上の方程式とドブレイルジャコティンロング方程式に基づき示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Abe Ken	4. 巻 63
2. 論文標題 Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 041507 ~ 041507
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0087152	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Abe Ken	4. 巻 391
2. 論文標題 Existence of Vortex Rings in Beltrami Flows	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 873 ~ 899
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04331-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Abe Ken, Choi Kyudong	4. 巻 -
2. 論文標題 Stability of Lamb Dipoles	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Archive for Rational Mechanics and Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00205-022-01782-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Abe Ken	4. 巻 300
2. 論文標題 On the large time L^p -estimates of the Stokes semigroup in two-dimensional exterior domains	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 337 ~ 355
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2021.08.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ken Abe	4. 巻 -
2. 論文標題 The vorticity equations in a half plane with measures as initial data	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.anihpc.2020.10.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Abe Ken	4. 巻 248
2. 論文標題 Existence of Homogeneous Euler Flows of Degree $-\alpha$ not in $[-2,0]$	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Archive for Rational Mechanics and Analysis	6. 最初と最後の頁 30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00205-024-01974-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計26件 (うち招待講演 26件 / うち国際学会 24件)

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Stability of Chandrasekhar's nonlinear force-free fields
3. 学会等名 Winter Workshop on Mathematical Analysis of Fluids (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Stability of Chandrasekhar's nonlinear force-free fields
3. 学会等名 RIMS workshop: Analysis of fluid dynamical PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Stability of Chandrasekhar's nonlinear force-free fields
3. 学会等名 RIMS workshop: Workshop on Variational Methods and Dispersive Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Stability of Chandrasekhar's nonlinear force-free fields
3. 学会等名 OCAMI joint usage: Space-time topology and geometry with a focus on vortex and magnetic fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor
3. 学会等名 Princeton Fluids seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor
3. 学会等名 Seoul National U. PDE seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor
3. 学会等名 RIMS conference: Mathematical analysis of viscous incompressible flows (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor
3. 学会等名 OCAMI joint usage: Helicity and space-time symmetry - a new perspective of classical and quantum systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Existence of vortex rings in Beltrami flows
3. 学会等名 workshop for nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor
3. 学会等名 Kyushu DE conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor
3. 学会等名 Osaka U. DE seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor
3. 学会等名 Hiroshima DE seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor
3. 学会等名 Meiji nonlinear PDE seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Existence of vortex rings in Beltrami flows
3. 学会等名 Meiji nonlinear summer seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Existence of vortex rings in Beltrami flows
3. 学会等名 Kobe analysis seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 阿部健
2. 発表標題 ベルトラミ流における渦輪の存在
3. 学会等名 神戸解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Existence of vortex rings in Beltrami flows
3. 学会等名 International Workshop on Multi-Phase Flows: Analysis, Modelling and Numerics, Waseda University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Existence of vortex rings in Beltrami flows
3. 学会等名 online workshop for nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 阿部健
2. 発表標題 On the large time L^{∞} -estimates of the Stokes semigroup in two dimensional exterior domains
3. 学会等名 第12回名古屋微分方程式研究会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Stability of Lamb dipoles
3. 学会等名 45th PDE Sapporo symp., Hokkaido Univ. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Existence of homogeneous Euler flows of degree $-\alpha$ not in $[-2,0]$
3. 学会等名 Recent Progress on Mathematical Fluid Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Existence of homogeneous Euler flows of degree $-\alpha$ not in $[-2,0]$
3. 学会等名 Fluids in Seoul 2024 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Stability of Chandrasekhar's nonlinear force-free fields
3. 学会等名 Patterns in solutions to the incompressible Euler equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Stability of Chandrasekhar's nonlinear force-free fields
3. 学会等名 Singularities in Fluids and General Relativity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Stability of Chandrasekhar's nonlinear force-free fields
3. 学会等名 Fluids and Maximal regularity (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Ken Abe
2. 発表標題 Existence of homogeneous Euler flows of degree $-\alpha$ not in $[-2,0]$
3. 学会等名 RIMS workshop: Mathematical analysis of fluid and gas (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Ken Abe https://sites.google.com/site/kabehomepage/home
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 Quasi-linear PDEs in fluids II	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Quasi-linear PDEs in fluids	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Analysis on PDEs in fluid	開催年 2024年～2024年
国際研究集会 The Grad Conjecture in fluid mechanics and magnetohydrodynamics: theory and applications	開催年 2024年～2024年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
韓国	UNIST	Seoul National University	
米国	City university of New York		