

令和 5 年 5 月 24 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2022

課題番号：20K14355

研究課題名（和文）非整数階拡散-波動方程式とその逆問題の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis for fractional diffusion-wave equations and related inverse problems

研究代表者

劉逸侃 (Liu, Yikan)

北海道大学・電子科学研究所・助教

研究者番号：70773084

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：非整数階拡散-波動方程式の定性的性質をより深く解明することができ、いくつかの逆問題も従来より一般の設定で解決した。

解の定性的性質に関して、先行研究が少なかった非整数階波動方程式を解析した結果、「一意接続性」と「長時間定符号性」の側面では非整数階拡散方程式と共通する結論に至った。

関連する逆問題に関して、上述理論の発展と新しい手法の導入によって先行研究の結果を大幅に刷新した。微分回数の決定について、解の漸近挙動のみによる一意性を証明した。複数の未知係数の同時決定について、一意性の証明に必要な観測回数を無限回から1回に減らせた。ソース項の決定に関して、データ量の削減と仮定の一般化に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は非整数階拡散方程式に関する結果を補完しつつ、先行研究が少なかった非整数階波動方程式に深く踏み入れ、両者の相違と類似点を「一意接続性」と「定符号性」などの観点から見極めた。これらは既存成果と合わせて、時間微分回数が0から2までの発展方程式の統一した定性理論の完成を意味する。また関連する逆問題の側面において、先行研究より一般かつ現実的な問題設定を考案し、さらに数値結果を裏付ける正当化を行うことで、理論と応用の両面から有意義な成果を得た。

本研究で得られた結果は関連分野の発展に寄与するのみならず、不均質媒質における汚染源の同定においても、事故直後のデータ欠落やデータ不足の場合にも役立つ。

研究成果の概要（英文）：In this research, qualitative properties of fractional diffusion-wave equations were obtained on a more advanced level, and several inverse problems were solved in more general settings from literature.

On qualitative properties of solutions, we focused on fractional wave equations which were not well-studied previously, and concluded that they coincide with fractional diffusion equations in the aspects of unique continuation and long-time positivity.

On related inverse problems, we also greatly improved preliminary results based on the development of theory above and introducing new methods. First, we obtained the uniqueness on determining orders only by the asymptotic behavior of solutions. Second, we reduced the necessary observation times for proving the uniqueness of simultaneous determination of multiple unknown coefficients from infinity to one. Third, for inverse source problems, we also succeeded in reducing the amount of data and generalizing the assumptions.

研究分野：偏微分方程式の逆問題

キーワード：非整数階拡散-波動方程式 非局所性 一意接続性 逆問題 一意性

1. 研究開始当初の背景

(1) 不均質媒質における粒子の特異拡散など、マルコフ性が破綻し、通常の偏微分方程式で記述できない現象に対して、非整数階微分を持つような非局所モデルが数多く提唱された。その中、非整数階時間微分をもつ偏微分方程式が時間メモリー効果を表すことができ、有力モデルとして注目されてきた。時間微分回数が1未満と1を超えて2未満によって、さらに非整数階拡散方程式と非整数階波動方程式に細分されるが、近年は特に前者に対する研究は急速に発展し、解の適切性(一意存在性・安定性)を代表とした基本性質が解明され、関連する逆問題も続々と解決された。

(2) 一方、後者の非整数階波動方程式は、粘弾性モデルなど重要な応用があるにもかかわらず、解析の困難さから理論と応用の両方で研究があまり進んでいなかった。例えば解析の基盤となる適切性、局所解と大域解をむすぶ一意接続性、解の時間発展を特徴づける減衰性と符号変化などにおいて、非整数階波動方程式には未解決問題が多い。特に両端にある放物型(拡散)方程式と双曲型(波動)方程式との関係や、非整数階拡散方程式との相違と類似性も充分に分かっていなかった。

2. 研究の目的

本研究はまず一般の定式化で非整数階波動方程式の基礎理論を整備した上、次に時間発展による解の変化を多角的に記述し、最後に非局所性が逆問題にもたらす影響を明らかにする。また、本研究は非整数階波動方程式に焦点を当てるが、(非整数階)拡散方程式および波動方程式との関係性を念頭に、方程式の定性的・定量的な性質を解明し、更に逆問題へ応用することを目的とする。具体的には、全体目標を次のように分けて考える。

- (1) 非整数階波動方程式の初期値・境界値問題について、(非整数階)拡散方程式などと同等の適切性理論を創出し、一意接続性などの基本性質を確立する。
- (2) 解の形状・保存則などの観点から非整数階波動方程式の時間発展を特徴づけ、数値計算によって拡散方程式と波動方程式との関係を検証する。
- (3) 上記の性質を非整数階拡散・波動方程式のいくつかの逆問題の一意性・安定性に応用し、他の方程式の既存結果と比較した上、類似性と差異を解明する。

3. 研究の方法

上記の研究目的に合わせて、研究方法を(1)~(3)に分けて記述する。

(1) 非整数階波動方程式の初期値・境界値問題について、非整数階拡散方程式に対する既存の手法をレビューした上、改良と一般化を行うことでその基本性質を確立する。支配方程式の空間方向が対称の場合、厳密解に現れる特殊関数を精密に評価し、先行研究で得られた安定性評価をシャープにする。非対称の場合、縮小写像に帰着することで不動点定理を用いて解の一意存在性を証明する。また一意接続性に関しては、Laplace変換を施し、複素解析による論法を試す。

(2) 解の形状について、非整数階拡散方程式の正值性の証明からヒントを受け、厳密解を用いて解の長時間漸近挙動を解明した上、空間位置を固定して解の符号変化回数を調べる。解の保存則について、波動方程式のエネルギーが非整数階の場合にどう変化するかを検証し、微分回数と時間に関する単調性があるかを調べる。また波動方程式のエネルギー保存と拡散方程式の質量保存から、その間に位置する可能な保存則を探索する。

(3) 上記で得られた性質を多様な逆問題設定(観測データと未知係数の組合せ)に応用し、得られた結果を他の方程式の結果と比較する。ソース項決定逆問題に関して、空間成分の決定は一意接続性、時間成分の決定は長時間漸近挙動を応用して一意性を示す。またソース項が平行移動する場合も、問題を初期値決定逆問題に帰着することで一意性の証明を試みる。一方、複数の係数を同時に決定する逆問題に関して、境界条件を巧妙に選定することで1回の観測で解決する可能性を探索する。

4. 研究成果

(1) 時間微分回数が1以下である非整数階拡散方程式に対し、源泉項が変数分離の形をした場合、その空間成分を解の最終時刻における観測データから決定する問題については、解析Fredholm理論を用いて条件付き一意性を示した。すなわち、高々可算個の除外点を除き、未知関数が観測データによって一意的に決められることを証明した(文献[3])。また、同じ問題設定で、解の部分内部領域における観測データによって源泉項の空間成分を数値的に再構成する問題については、離散化された最適化問題の解の存在性、安定性および収束性を示し、反復法に基づく効率的な数値スキームを開発し、空間2次元までの数値例で検証した(文献[1])。

(2) 時間微分回数が1以上で2以下である非整数階拡散-波動方程式に対し、解の定性的な性質の1つとして重要な「一意接続性」を確立した。すなわち、解の局所的なデータより大域的な情報が一意的に決まることを証明した。この結果は時間微分回数が1以下に対する先行研究を拡張し、時間微分回数が2である波動方程式と決定的に異なることを意味する。さらにその応用として、源泉項が既知のベクトルに沿って平行移動し、その形状が未知の場合、境界付近の観測データによって形状を特定する問題について、一意性を証明した。特に階数が1以下のとき、一つの形状を特定できるが、階数が1以上で2以下の場合、移動方向が異なる二つの形状を同時に特定できることを示した(文献[5])。また、上記1と類似した反復法に基づく数値スキームを考案し、収束性を示した。

(3) 非整数階拡散-波動方程式に現れる時間微分回数や拡散係数など複数の未知係数を、部分境界における一回の観測によって同時に決定する逆問題について、一意性を示した。この問題に対する従来の方法は無限回の観測を要したが、本研究は境界の入力データを巧妙に選ぶことで解を時間解析的な成分に分解し、Laplace変換によってDirichlet-to-Neumann写像を構成する十分な情報量の確保に成功した。この結果は観測回数を極限まで削減し、既存の結果を本質的に改善した(文献[2])。

(4) 解の定性的な性質の1つとして重要な「一意接続性」について、空間1次元における特殊な非整数階拡散方程式に限って、データを必要最小限に減らした。非局所性の影響で、先行研究は余分に境界と部分内部データを仮定したが、本研究は複素解析の手法を駆使して、空間1点におけるCauchyデータによる解の一意性を証明した。さらにその応用として、関連するソース項決定逆問題のシャープな一意性も示した(文献[4])。

(5) 上述のソース項決定逆問題のもう1つの側面として、観測時間の一般化を試みた。従来の文献では、初期時刻から観測することは一般的であったが、突発的な事故などにおいて現実的ではない。本研究は方程式の非局所性を逆手に活用し、観測時間を任意の开区間まで緩めても(特に観測は事故が終わった後に始まっても)、ソース項の空間成分を一意的に決定できることを証明した。この結果は理論的に新規でありながら、汚染源の特定などの環境問題への応用も期待できる。

(6) 時間微分回数を決定する逆問題について、適切な観測データによる一意性の先行研究があるが、解の短時間漸近挙動のみを用いて同じ結論を証明し、さらに特殊な条件下で初期値の一意性も示した。本研究のデータ量と仮定はすべての先行研究より本質的に弱く、微分回数は方程式に対して支配的であることが示唆された(文献[6])。

(7) 時間微分回数が1と2の間にある非整数階波動方程式の解は振動し、最大値原理は成り立たないが、解の長時間定符号性を証明した。すなわち、解の符号変化は有限であり、時間が十分経つと定符号になるが、その符号は初期値に依存することを示した。応用として、関連する時間ソース項決定逆問題の一意性も示した。

<引用文献>

- [1] D. Jiang, Y. Liu, D. Wang, Numerical reconstruction of the spatial component in the source term of a time-fractional diffusion equation, *Adv. Comput. Math.*, 46 巻, 2020, Article 43.
- [2] Y. Kian, Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, The uniqueness of inverse problems for a fractional equation with a single measurement, *Math. Ann.*, 380 巻, 2021, 1465 - 1495.
- [3] Z. Li, X. Cheng, Y. Liu, Generic well-posedness for an inverse source problem for a multi-term time-fractional diffusion equation, *Taiwanese J. Math.*, 24 巻, 2020, 1005 - 1020.
- [4] Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, Inverse source problem for a one-dimensional time-fractional diffusion equation and unique continuation for weak solutions, *Inverse Probl. Imaging*, 17 巻, 2023, 1 - 22.
- [5] Y. Liu, G. Hu, M. Yamamoto, Inverse moving source problem for time-fractional evolution equations: Determination of profiles, *Inverse Problems*, 37 巻, 2021, 084001.
- [6] Y. Liu, M. Yamamoto, Uniqueness of orders and parameters in multi-term time-fractional diffusion equations by short-time behavior, *Inverse Problems*, 39 巻, 2023, 024003.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Jiang Daijun, Liu Yikan, Wang Dongling	4. 巻 46
2. 論文標題 Numerical reconstruction of the spatial component in the source term of a time-fractional diffusion equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Computational Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10444-020-09754-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Li Zhiyuan, Cheng Xing, Liu Yikan	4. 巻 24
2. 論文標題 Generic Well-posedness for an Inverse Source Problem for a Multi-term Time-fractional Diffusion Equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Taiwanese Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1005 ~ 1020
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11650/tjm/191103	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Liu Yikan	4. 巻 2174
2. 論文標題 Numerical schemes for reconstructing profiles of moving sources in (time-fractional) evolution equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 73 ~ 87
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Liu Yikan, Hu Guanghui, Yamamoto Masahiro	4. 巻 37
2. 論文標題 Inverse moving source problem for time-fractional evolution equations: determination of profiles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Inverse Problems	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6420/ac0c20	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kian Yavar, Li Zhiyuan, Liu Yikan, Yamamoto Masahiro	4. 巻 380
2. 論文標題 The uniqueness of inverse problems for a fractional equation with a single measurement	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1465 ~ 1495
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-020-02027-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 劉 逸侃	4. 巻 2232
2. 論文標題 時間非整数階拡散方程式とその逆問題について	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 50 ~ 65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Li Zhiyuan, Liu Yikan, Yamamoto Masahiro	4. 巻 17
2. 論文標題 Inverse source problem for a one-dimensional time-fractional diffusion equation and unique continuation for weak solutions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Inverse Problems and Imaging	6. 最初と最後の頁 1 ~ 22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/ipi.2022027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Liu Yikan, Yamamoto Masahiro	4. 巻 39
2. 論文標題 Uniqueness of orders and parameters in multi-term time-fractional diffusion equations by short-time behavior	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Inverse Problems	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6420/acab7a	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 10件 / うち国際学会 9件）

1. 発表者名 Jiang Daijun、劉 逸侃、Wang Dongling
2. 発表標題 非整数階時間微分をもつ拡散方程式における源泉項の空間成分の数値再構成について
3. 学会等名 日本応用数理学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Liu Yikan
2. 発表標題 Uniqueness and numerical schemes for an inverse moving source problem for (time-fractional) evolution equations
3. 学会等名 4th Conference on Numerical Methods for Fractional-Derivative Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Liu Yikan
2. 発表標題 Inverse moving source problems on determining profiles in (time-fractional) evolution equations
3. 学会等名 Workshop on Inverse Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Liu Yikan
2. 発表標題 Uniqueness for determining profiles of moving sources in (time-fractional) evolution equations
3. 学会等名 The Workshop on Theoretical and Computational Analyses for Inverse Problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hu Guanghui、劉 逸侃、山本昌宏
2. 発表標題 (時間非整数階) 発展方程式における移動する源泉項の形状決定について
3. 学会等名 2020年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 劉 逸侃
2. 発表標題 Uniqueness for the simultaneous determination of multiple coefficients in a fractional evolution equation by a single measurement
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 劉 逸侃
2. 発表標題 General introduction to time-fractional differential equations and related topics
3. 学会等名 時間遅れ系と数理科学: 理論と応用の新たな展開に向けて (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 劉 逸侃、山本昌宏
2. 発表標題 不正確なデータによる非整数階拡散方程式の係数決定逆問題の一意性
3. 学会等名 2021年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Liu Yikan
2. 発表標題 Inverse source problems for time-fractional diffusion equations: Old and new
3. 学会等名 実用逆問題とその展望 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劉逸侃
2. 発表標題 時間非整数階発展方程式における源泉項決定逆問題の再訪と新展開
3. 学会等名 北陸応用数理研究会2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Liu Yikan
2. 発表標題 Recent progress in inverse source problems for time-fractional diffusion equations
3. 学会等名 NUAA 2022 Online Workshop on Inverse Problems and Image Processing - Modeling, Analysis and Computation (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Liu Yikan
2. 発表標題 Unique determination of orders and parameters in multi-term time-fractional diffusion equations by inexact data
3. 学会等名 Inverse Problems for Anomalous Diffusion Processes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Liu Yikan
2. 発表標題 Inverse source problems for time-fractional diffusion/wave equations
3. 学会等名 10th International Conference “Inverse Problems: Modeling and Simulation” (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Liu Yikan
2. 発表標題 Uniqueness of a parameter inverse problem for multi-term time-fractional diffusion equations by inexact data
3. 学会等名 French-Italian-Japanese Conference “Theoretical and Numerical Trends in Inverse Problems and Control for PDE's, and Hamilton-Jacobi Equation” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Liu Yikan
2. 発表標題 Two inverse source problems for time-fractional wave equations
3. 学会等名 Workshop “Recent Advances in Direct and Inverse Problems for PDEs and Applications” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劉逸侃、黃欣馳
2. 発表標題 非整数階波動方程式の長時間漸近評価および関連する源泉項決定逆問題
3. 学会等名 2022年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 劉逸侃
2. 発表標題 非整数階拡散方程式系の初期値境界値問題について
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

researchmap
https://researchmap.jp/yikan_liu

6. 研究組織			
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)		備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
				他2機関
中国	Nankai University	Ningbo University	Central China Normal University	
フランス	Aix-Marseille University			