

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：15401

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K20879

研究課題名（和文）一般ホッジ予想とヒルベルトスキームに対するレフシェッツ・ミルナー理論

研究課題名（英文）Generalized Hodge conjecture and Lefschetz-Milnor theory for Hilbert schemes

研究代表者

島田 伊知朗（Shimada, Ichiro）

広島大学・先進理工系科学研究科（理）・教授

研究者番号：10235616

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：Hodge 構造は複素代数多様体の重要な不変量である。Hodge 構造を用いて複素代数多様体のコホモロジー環という位相的なデータとその部分多様体の族という代数的なデータをつなぐ予想である一般 Hodge 予想が定式化される。この Hodge 構造を具体的な複素代数多様体のいくつかの例に対して詳細に調べることが目標として研究を行った。特に、近年計算機の発達に伴い実用的なものとなった、周期の数値的計算による Hodge 構造の決定への応用を目的として代数多様体の位相的サイクルの研究を行い、直線配置で分岐する 2 重平面に対して、その中間次元ホモロジー群の明示的な基底を与え、格子としての構造を記述した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Hodge 予想は、クレイ研究所が発表したミレニアム問題の一つであり、コホモロジー環の Hodge 構造という複素代数多様体の線形的なデータからもとの複素代数多様体の部分多様体がどれだけ復元できるかということについての予想である。計算機の性能の向上により、具体的な複素代数多様体に対して、Hodge 構造、すなわち周期に数値的にアプローチする方法が開かれた。この研究においては、このアプローチの一例としてある代数曲面に対しその中間次元のホモロジー群を明示的に記述した。

研究成果の概要（英文）：The Hodge structure is an important invariant of complex algebraic varieties, and is used to formulate the general Hodge conjecture, which connects the topological data of the cohomology ring of a complex algebraic variety with the algebraic data of its families of subvarieties. The goal of this research is to investigate this Hodge structure in detail for some examples of concrete complex algebraic varieties. In particular, we studied topological cycles of algebraic varieties with the aim of applying them to the determination of Hodge structures by numerical computation of periods, which has become practical in recent years due to the development of computers. In particular, we describe the middle homology group of a double affine plane branched in a nodal real arrangement.

研究分野：代数幾何学

キーワード：周期 ホモロジー群 二重平面 Hodge 構造 消失サイクル

### 1. 研究開始当初の背景

一般 Hodge 予想は、非特異複素射影代数多様体の Hodge 構造という位相的かつ線形的なデータから、その多様体上の部分多様体の存在(これは優れて非線形な問題である)を導くことができるという予想であり、Tate 予想と並んで、代数幾何学における非常に重要な未解決問題のひとつである。しかしながら、現在までのところ、この予想に関して非自明な事実を述べた例はごくわずかしかない。その原因の一つは、一般的に Hodge 構造というのは代数多様体の変形のもとで連続的に変動する超越的な量であり、その計算と具体的な記述が著しく困難であるという点にあると考えられる。周期写像の全射性などを用いることにより非自明な Hodge 構造をもつ代数多様体の存在はわかるのだが、その具体的な構成はとても難しいというのがよく見られる状況である。

### 2. 研究の目的

与えられた複素代数多様体に対して、その Hodge 構造を具体的に調べ、一般ホッジ予想を検証する。そのために、複素代数多様体をトポロジカルな観点から明示的に記述し、数値的代数幾何学の手法を用いて、周期の数値計算から Hodge 構造を記述することを目指す。この方法はまだ射影空間内の曲面や特別な Calabi-Yau 3-fold にしか適用されていないが、その高次元への拡張を目指す。また、複素代数多様体の位相幾何学的研究に有用な各種の計算ツールを準備する。さらにこの方法においては、位相的サイクルのなす交差形式、すなわち格子の構造が重要である。位相的サイクルの交点を計算するための方法を蓄積する。

### 3. 研究の方法

計算機と計算代数ソフトウェアの発達により、複素代数多様体の周期を数値積分により高精度で計算することが可能となった。この数値計算を Lenstra-Lenstra-Lovasz による格子基底還元アルゴリズムと組み合わせることにより、複素代数多様体の Hodge 構造を高い確率で正しく求めることが可能になる。もちろん、数値積分は近似値を与えるに過ぎないので、この方法は Hodge 構造を数学的に厳密に求めるものではない。しかしながら、これにより一般ホッジ予想を調べるための非自明な実験サンプルを多数構成することが可能になると期待される。そのために、数値積分の台となる複素代数多様体上の位相的サイクルを明示的に記述する。さらにこれらの位相的サイクルの交点数を求めることで、複素代数多様体のコホモロジー群の格子としての構造を求める。

### 4. 研究成果

- (1) Quebbemann(1984)の構成を一般化することによりランク 64 の extremal な偶格子を多数構成した。これらの格子が同型でないことを示すために最小ノルムのベクトルの交点数を全て計算するという方法を用いた。この構成によりおそらく膨大な数の extremal 偶格子の同型類が構成できると期待される。
- (2) 複素エンリケス曲面上の有理 2 重点を全て分類した。また、Simon Brandhorst との共同研究により、エンリケス曲面のネロン・セヴェリ格子(のグラム行列を 2 倍にしたもの)の、階数 26 のユニモジュラーな双曲偶格子への埋め込みを分類し、これらが simple Borcherds タイプであることを示し、対応する基本領域の形を具体的に求めた。さらに、これらの埋め込みを用いて非常に広いクラスのエンリケス曲面に対し、その自己同型群を計算し、楕円ファイブレーションの集合および非特異有理曲線の集合上への作用を記述した。その結果、ネフ錐上の基本領域の体積に関して美しい公式を発見した。
- (3) Harris(1982) の非特異平面 4 次曲線の 28 本の bitangents の集合上へのモノドロミーの計算を、非特異平面 4 次曲線の 4-tangent conics の集合上のモノドロミーに拡張した。ここで、非特異平面 4 次曲線で分岐する射影平面の 4 次巡回拡大として得られる K3 曲面のネロン・セヴェリ格子とネフ錐の構造を用いた。この結果をもとに射影平面曲線の Zariski N 対の無限系列を構成した。ここで N は平面曲線の次数の 62 乗のオーダーで増加する。これらの Zariski N 対のトポロジカルな型は、位相的サイクルのなす交差形式により区別される。
- (4) K3 曲面の楕円ファイブレーションから自己同型を計算するアルゴリズムを整備した。これを用いて K3 曲面の自己同型を大量に見出すシステムを計算機上に構築した。応用として 6 個の通常尖点をもつ non-conical な 6 次曲線で分岐する射影平面の 2 重被覆として得られる K3 曲面の自己同型群の生成元を幾何学的に計算した。この 6 次曲線は Zariski pair の最初の例において現れた(しかしその具体的な方程式は岡により 1992 年ようやく与えられ

た) 由緒正しい6次曲線である.

- (5) 階数が 26 のユニモジュラー双曲偶格子のワイル群の標準的な基本領域とその自己同型群についての Conway (1983)の古典的な仕事は,ピカル数が 26 の仮想的な(すなわち存在しない) K3 曲面についての代数幾何学の言葉により解釈することができる.このアイデアに基づいて, K3 曲面の自己同型群についてのアルゴリズムを,階数が 26 のユニモジュラーな双曲偶格子に適用し,アンブラル・ムーンシャイン予想に幾何学的にアプローチすることを目指した.この過程においてリーチ格子の新しい構成法を発見した.
- (6) 通常節点のみをもつ実直線配置にそって分岐する複素アフィン平面の二重被覆のトポロジーを研究し,この直線配置の実構造を用いて,二重平面上のあるトポロジカルな 2 サイクルを定義して,その交差形式を求めた.このトポロジカル 2 サイクルはレフシェッツの消失サイクルといろいろな点で類似している.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Simon Brandhorst, Slawomir Rams, Ichiro Shimada	4. 巻 59
2. 論文標題 On Characteristic Polynomials of Automorphisms of Enriques Surfaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 633 ~ 656
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/PRIMS/59-3-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Shimada Ichiro	4. 巻 34
2. 論文標題 A note on Quebbemann's extremal lattices of rank 64	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal de theorie des nombres de Bordeaux	6. 最初と最後の頁 813 ~ 826
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/jtnb.1229	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Shimada Ichiro	4. 巻 24
2. 論文標題 Zariski multiples associated with quartic curves	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 169 ~ 189
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2022.24g	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Brandhorst Simon, Shimada Ichiro	4. 巻 71
2. 論文標題 Borchers' Method for Enriques Surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 3 ~ 18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1307/mmj/20195769	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Shimada Ichiro	4. 巻 64
2. 論文標題 Rational double points on Enriques surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Science China Mathematics	6. 最初と最後の頁 665--690
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11425-019-1796-x	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Brandhorst Simon、Shimada Ichiro	4. 巻 --
2. 論文標題 Automorphism Groups of Certain Enriques Surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Foundations of Computational Mathematics	6. 最初と最後の頁 --
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10208-021-09530-y	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計8件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 Topology of a double plane branching along a real line arrangement
3. 学会等名 Seminar talk at Dalat University (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 Vanishing cycles of a double plane branching along a real line arrangement
3. 学会等名 Workshop "Topology of Singularities and Related Topics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 The automorphism group of a K3 surface birational to a double plane
3. 学会等名 Real Aspects of Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 Mordell-Weil groups of a certain K3 surface
3. 学会等名 Recent Development in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 あるK3曲面の自己同型群について
3. 学会等名 K3, Enriques Surfaces, and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 Automorphism groups of Enriques surfaces (joint work with Simon Brandhorst)
3. 学会等名 Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces -- Sixth Edition (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 Computation of automorphism groups of Enriques surfaces (joint work with Simon Brandhorst)
3. 学会等名 ODTU-Bilkent Algebraic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ichiro Shimada
2. 発表標題 Computation of the nef cone and the automorphism group of an Enriques surface (joint work with Simon Brandhorst)
3. 学会等名 Online Workshop on Calabi-Yau Varieties and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Computation Data  <a href="https://home.hiroshima-u.ac.jp/ichiro-shimada/ComputationData.html">https://home.hiroshima-u.ac.jp/ichiro-shimada/ComputationData.html</a></p>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 第6回トロピカル幾何ワークショップ	開催年 2024年～2024年
国際研究集会 Workshop "Topology of Singularities and Related Topics"	開催年 2023年～2023年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Stuttgart University			
イタリア	University of Padua			
ベトナム	Dalat University			