

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 24 日現在

機関番号：32686

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K20880

研究課題名(和文) 超平面配置のポアンカレ多項式の根が拓く代数・幾何・組み合わせ論の融合

研究課題名(英文) Fusion of algebra, geometry and combinatorics based on the roots of Poincare polynomials of hyperplane arrangements

研究代表者

阿部 拓郎 (ABE, TAKURO)

立教大学・理学部・教授

研究者番号：50435971

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、超平面配置のポアンカレ多項式の根の意味を問うという根源的な問題に挑戦した。結果として得られた大きな成果は二つある。一つ目は超平面配置が整数根を持つ場合、その局所化や制限配置がどのような整数根を持つかという根の挙動に関する結果である。これらに関する研究は特に局所化周りにおいては存在しなかったが本研究において局所化や制限が整数根を持つ場合それ等にはオリジナルの整数根の情報から制限を受けることが判明した。二つ目は超平面配置の様々な研究におけるモデルケースとなるグラフ配置に関する結果で、グラフの自由性つまり根を保ちながら変形する方法を定式化し、根の理解を深めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超平面配置とはベクトル空間中の有限個の超平面の集合であり、最も簡単な例は平面に有限本の直線を描いた図形である。これは植木算の高次元化といえ、植木算における区間の数え上げに対応するものが、超平面の交わりの情報いわゆる交差格子とそこから得られる区間の一般化であるポアンカレ多項式である。このポアンカレ多項式が整数根を持つ場合があるが、その意味は自由配置の場合以外謎に包まれていた。本研究ではその根の意味に切り込むことで、超平面配置理論の深い理解を目指し、特に超平面配置を制限したりある点の周りのローカルな情報に集中した場合の挙動、及びグラフから構成される配置の整数根について研究を深めることができた。

研究成果の概要(英文)：In this research project we study the meaning of the integer roots of Poincare polynomials of hyperplane arrangements. They are determined combinatorially, and when the arrangement is free they have a good algebraic meaning by Terao's factorization theorem. However, in general there are no good way to understand them. We tried to understand them, and obtained two main results. The first one is on the relation of integer roots of the original arrangement and its localization/restriction. Localizations and restrictions are important operations in the research of arrangements, but how their integer roots are related have not been well-understood. By using the surjectivity of the Euler restriction map, we related them. Second, we studied integer roots of arrangements coming from digraphs. There are two important classes of such arrangements called Shi and Ish arrangements. We found a graphic operation keeping the integer roots (in fact, freeness is kept) and connect these arrangements.

研究分野：超平面配置の数学、代数学

キーワード：超平面配置 ポアンカレ多項式 整数根 対数的ベクトル場 オイラー制限射 グラフ配置 局所化と制限

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

超平面配置とはベクトル空間中の超平面の有限集合であり、植木算の高次元化といえる。それに対して代数・幾何・組み合わせ論など様々な研究がおこなわれている。超平面配置の組み合わせ不変量の中で最も基本かつ重要なものに、ポアンカレ多項式があげられる。これは基礎体が複素数の場合、超平面配置の補空間の位相的ポアンカレ多項式と一致するなど著しい性質がある。このポアンカレ多項式が整数根（厳密には整数 n に対して根は $-1/n$ の形をしており、整数根という場合はポアンカレ多項式の双対に当たる特性多項式が整数根を持つ場合をさすが、ポアンカレ多項式のほうが位相幾何的に見やすいため本稿ではポアンカレ多項式の整数根という用語を用いる）を持つ場合の最も重要な例は自由配置の場合でこの時は寺尾の分解定理により整数根には対応する対数的ベクトル場の自由基底の次数という良い意味付けがなされていた。他方、自由配置でなくとも整数根を持つ場合がある。それらは組み合わせ論的に定まる整数であるためなにがしかの意味を求めたくなるが、研究開始時点でそれらに関する研究は皆無であった。これらは組み合わせ論的に定まる非負整数であり、かつそれらの基本対称式が、基礎体が複素数の場合はベッチ数となるため、代数、幾何、組み合わせ論すべての面から見ても重要な数である。しかしながら、ベッチ数は違い、それらを構成する要素であるはずのこの根たちの幾何学的あるいは組み合わせ論的意味は全く知られていなかった。多項式の根というものは基礎的かつ最も重要な数学的不変量であり、その意味が超平面配置というシンプルな対象のポアンカレ多項式の場合でもわからないという、謎の多い背景が存在していた。

2. 研究の目的

本研究は上記背景に基づいて、ポアンカレ多項式が整数根を持つ場合、その代数・幾何学的意味を理解することを目的とした。あるいはそれと関連して、整数根にまつわる様々な性質を解き明かすことで、自由配置の場合以外に謎であったそれらの意味を組み合わせ論や幾何学的な側面から理解し、かつその理解を超平面配置以外の多様体のポアンカレ多項式の整数根の意味付けへと拡張することで、このポアンカレ多項式の整数根という不変量の理解を深め、新しい重要な幾何学的不変量として構築することを目指す。

3. 研究の方法

まず計算機実験などを通して、ポアンカレ多項式が整数根を持つ超平面配置を多数生成し、その性質を具体的に探るところから始める。更に理論面からは、整数根を持つ超平面配置の様々な性質を理論的に解析する。またより具体的なケースとしてグラフ配置のようなケースに同様の問題を考察することで、一般的な場合の研究のベースとする。更に整数根の挙動についても調べる。即ちある配置が整数根を持つ場合、それと関連する配置が整数根を持ちうるか、更に持つ場合その整数根は元の配置のそれとどのような関係があるかを調べる。この手法は一般の多様体の超平面切断へも援用が可能であり、数学全体に対して有用な手法であると考えられる。また海外の共同研究者と直接打ち合わせを行うことで最新の情報を収集し、それにより研究を進展させる。

4. 研究成果

本研究では二つの大きな成果を上げそれらを論文として出版することに成功した。以下詳細を記述する。

一つ目はポアンカレ多項式が整数根を持つ場合、その配置の制限および局所化の整数根との関係に関する結果である。超平面配置が与えられたとき、それを配置に含まれる超平面配置に制限して得られる次元低い空間の配置を制限配置と呼ぶ。また超平面配置の中から有限個の元を取り出しその交わりの線型空間を固定した時、その空間を含む超平面を考えたものを局所化と呼ぶ。この二つは帰納法などを使う際に極めてよく登場し、かつ元の配置の様々な性質と関連していることが多く、超平面配置の研究における重要な研究対象であった。これに対して、元の超平面配置の整数根が、この二つの操作に対してどのような挙動を示すかは全く研究されていなかった。これは元の配置が自由配置である場合ですら全く知られていない。もう少し詳しく述べると、元の配置が自由で、制限配置が自由でかつその指数が元の指数に含まれる場合は、寺尾の加除定理が機能することで様々な状況が明らかになるが、そうならないケースも多々あり、そういった場合は完全に未知の分野であった。同時に自由配置の局所化は常に自由であることが知られているが、他方その場合二つの自由配置の指数つまりそれらのポアンカレ多項式の根た

ちの間の関係は制限配置の場合以上に謎であった。そこで代表者はこの二つの関係を調べ上げ、新しい結果を得ることに成功した。この際効果を発揮したのは近年研究代表者が異なる文脈で得ていた、オイラー制限射の全射性に関する結果であり、これを用いることで自由配置の場合特に基底の次数に制限がかかることを用いて、元の配置のポアンカレ多項式の整数根と、制限および局所化配置の根の間の大小に関する結果を得ることができた。更により特性多項式がどちらも実根を持つような配置とその制限配置については、より興味深い解析も行った。このようなケースは頻繁に起こることが知られていながら、これらの根の大小といった非常にシンプルなことについては全く知られていなかった。これに対して研究代表者は、以下のようなケースが決して起きないことを証明した。つまり元の配置の実根を昇順に並べ、そのうち隣り合った相異なる二つを選ぶ。そしてその二つの根の大小の順番を変えないまま、距離を元のものより小さくした新しい実数を二つ構成し、その二つとそれ以外の根からなる集合を考える。この時この根から任意の一つを取り除いて得られる実数の集合は、元の配置の制限配置の特性多項式の根とはなりえないというのが研究代表者が今回証明した結果である。これはもう少し精密な定式化はあるものの、実用上かつ直感的にはこの定式化が最もわかりやすい。例えば実四次元空間の超平面配置の特性多項式の根が $1, 3, 5, 7$ であるとする。この時例えば上の操作を $5, 7$ に行うと新しい数列として $1, 3, 6, 6$ が構成できる。このとき 1 は特殊事情から常に根となるため、上の結果が述べていることはこのとき $1, 3, 6$ や $1, 6, 6$ を根と持つような制限配置は決して現れないという興味深い事実であり、制限配置の根は元の配置の根に強く影響されていることがわかる。また局所化についてもう少し細かく述べると、局所化のフィルトレーションを取ったとき、部分空間による flag のそれと同じような、第二ベッチ数に関する不等式が存在することが示され、これを用いてこの不等式が全てイコールとなるような配置は超可解配置と呼ばれる極めて良い配置になることも分かった。この結果を用いて、局所化についても上述した制限の場合と同じような、局所化配置にありえることがない実根の列があることが分かった。上の例と同じことが、局所化でもいえるということであり、制限と局所化という全く異なる操作に対してもこのようなことがいえるというのは、研究者としては驚くべき事実である。これらの研究は、この方向では全く新しい研究であり、同時にやはり元の配置とその制限および局所化の整数根の間には関係があることが判明した。これによりポアンカレ多項式の根に関する理解が深まった。

次の研究は超平面配置のモデルケースといえるグラフ配置に関する研究である。今回は有向グラフから定まる配置の研究であるが、これらも総称してここではグラフ配置と呼ぶこととする。グラフ配置は様々な研究でモデルケースとして使われるため、これらの配置の整数根を調べることでほかのケースへの応用を狙ったものである。ここでは Shi 配置と Ish 配置と呼ばれる似ているようで異なる部分もある配置について研究を行った。まず Shi 配置は古典的なワイル配置の変形の中で最初に導入された由緒正しいものである。具体的に述べるとルート系の元に直交するような元全体からなる超平面の集合が古典的なワイル配置であり、その自由性は斎藤恭司氏の 1970 年代の仕事から知られており、それ以外もトポロジーや組み合わせ論あるいは原始微分などのコンテキストで幅広く研究されていた。その変形とは、ルートと内積を取ったときにある整数区間を動くようなものを言い、Shi 配置はこの内積がゼロか 1 となるような超平面全体からなる、ワイル配置を含みつつその平行移動を各超平面について一枚含むようなものであった。これを $-k+1$ から k までとしたものを一般化された Shi 配置といい、その自由性は、この平行移動を対称にした一般化された Catalan 配置、つまり内積の値が $-k$ から k までの場合であるが、それと同様に Edelman-Reiner 予想として知られており、吉永正彦氏によって解かれるまで超平面配置における重要な問題であった。このように歴史的にも重要な Shi 配置に対して、その定義方程式を変形したようなものとして Ish 配置が Armstrong により導入され、この二つの配置の類似点と相違点が深く研究されてきていた。特にこの両者は自由配置で(これも Ish 配置については、研究代表者らが過去に証明した)かつ指数も一致することが知られていた。更にこの二つはある種の双対関係にあり、これらの自由性や根を直接的につなぐ理論の存在が期待されていたがこれまでのところ存在していなかった。これに対し、これらを少しずつ変形してつなぐことができる配置群の存在が調べられており、これらのポアンカレ多項式は Shi 配置や Ish 配置と同じ整数根を持つことが知られていた。これらはすべてグラフ配置であったため、Shi 配置のグラフを変形して Ish 配置にし、かつ整数根や自由性を保つことができる操作があるのではないかと、という点から研究代表者は辻栄周平氏、Tan Nhat Tran 氏と共同研究を実施した。その結果まさに上述した性質を持つグラフの操作を定式化し、それが自由性と根を保つことを証明した。これにより Shi 配置と Ish 配置の様々な性質が自然につながれ、理解が深まった。この操作は king elimination と呼ばれるもので、以下で少し具体的に説明する。これらの配置をグラフで特徴づける際、矢印付きのグラフ、いわゆる有向グラフを用いる。この時矢印が全て向かってくる頂点、あるいは逆に矢印がすべて出てゆく頂点に対してそれらを変形する操作がこれで、これを巧みに定式化することで、グラフ及びそれに対応する超平面配置の自由性とその指数を保ったまま、徐々に配置を変形することで Ish 配置と Shi 配置を直接的につないで理解することができるという構造となっている。更に現在はこの操作を一般の配置にも拡張することで、同じ根を持つ配置の理解を促進することを計画中である。

以上のように本研究では、コロナ禍により海外研究者との直接的な打ち合わせがしづらいつという困難がありながらも、オンラインツールなどを使うことでそれらの困難を克服し、いくつか

の良い研究成果を得ることができ、超平面配置の整数根の理解を促進することができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takuro Abe	4. 巻 313
2. 論文標題 Roots of the characteristic polynomials of hyperplane arrangements and their restrictions and localizations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2021.107990	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Abe Takuro, Tran Tan Nhat, Tsujie Shuhei	4. 巻 118
2. 論文標題 Vertex-weighted digraphs and freeness of arrangements between Shi and Ish	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.ejc.2024.103920	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 阿部拓郎
2. 発表標題 Sylvester-Gallai の定理と対数的ベクトル場の分裂型
3. 学会等名 城崎代数幾何シンポジウム2022 (online) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takuro Abe
2. 発表標題 Projective dimensions of weakly chordal graphic arrangements
3. 学会等名 JSPS-VAST Bilateral Joint Research Project Workshop "Topology of Singularities and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Researchmap https://researchmap.jp/7000008882 阿部拓郎 https://sites.google.com/site/takuroabemath/a-bu-ta-lang

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	沼田 泰英 (Numata Yasuhide) (00455685)	北海道大学・大学院理学研究院・教授 (10101)	
研究 分 担 者	鍛冶 静雄 (Kaji Shizuo) (00509656)	九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授 (17102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------