

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 5 月 26 日現在

機関番号：33910

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K20885

研究課題名（和文）無限粒子系の古典力学

研究課題名（英文）Classical dynamics of infinite particle systems

研究代表者

長田 博文（Osada, Hirofumi）

中部大学・工学部・教授

研究者番号：20177207

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は無限粒子系の古典力学を研究することを目標とし、無限次元確率微分方程式の解の低粘性極限を取るという戦略を採用した。そのために重要となるIFC条件に関する論文を完成し出版した。IFC条件というのは、無限次元方程式を、無限個の有限次元方程式の列に分解するための条件である。これを用いてDysonモデルというランダム行列に関する無限粒子系の確率力学に関して、マルコフ過程としての既約性を証明した。これは、個々の粒子を区別するという意味で、ラベル力学に対して証明したものである。更に、不変確率測度の非存在を証明した後、アンラベル力学のエルゴード性を証明した。これらは二つの論文で出版した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

無限粒子系とは、単一もしくは少種類の粒子の莫大な量からなる系を記述する数学的对象である。従来の伝統的研究が単一もしくは少数の粒子の研究から始められたのに比して、無限粒子系の研究は集団的挙動を解明するという使命を持ち、統計物理や情報理論など多くの分野とつながっている。従来なされた豊饒な古典的研究は、一つの粒子の研究である。その無限粒子系の対応物を考えることは、新たな世界や現象を解明することにつながる。現実の世界は極めて多量の粒子からできており、それを考察するための確固たる数学的手段を構築する無限粒子系の研究は、是非やり遂げるべき課題である。

研究成果の概要（英文）：This research aims to study the classical mechanics of infinite particle systems and takes the low-viscosity limit of solutions to infinite-dimensional stochastic differential equations. We have completed and published a paper on IFC conditions, which is essential in this study. The IFC condition is a condition for decomposing an infinite dimensional equation into a sequence of infinite finite-dimensional equations. Using this, we proved the irreducibility of the Dyson model, the stochastic mechanics of an infinite particle system related to random matrices, as a Markov process. This was proved for label dynamics because it distinguishes individual particles. Furthermore, after establishing the non-existence of an invariant probability measure of the labeled dynamics, we proved the ergodicity of unlabeled dynamics. These were published as two papers.

研究分野：確率論

キーワード：無限粒子系 ランダム行列 古典力学 確率力学 無限次元確率微分方程式 エルゴード理論 Dysonモデル

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

干渉を持つ無限粒子系に対する古典力学の構成は、1970年代から80年代にかけて、Lanford や Fritz による、1次元および2次元の gradient 系に対して少し結果があったが、それ以外は長期間に渡り放置され進展していなかった。

### 2. 研究の目的

一つの物体(粒子)の運動は、古典(ニュートン)力学にしたがう常微分方程式で記述される。現実の世界は膨大な数(数学的には無限個)の粒子からなり、その時間発展は、無限粒子系が満たす無限次元常微分方程式で記述される。これを解き、統計力学的視点から研究することは、困難だが決定論的な世界の根源を理解する上で必須の主題である。本研究の目的は一般次元、特に3次元のユークリッド空間内を運動する無限個の粒子の運動を記述する常微分方程式を解き、無限粒子系の古典力学と勾配型力学を構築することである。そして、この困難かつ重要な問題の研究に突破口を開くことである。

### 3. 研究の方法

本研究で扱うのは、無限粒子系に対する常微分方程式だが、それに対応して、無限粒子系を記述する無限次元確率微分方程式が存在する。これらは古典力学と勾配型力学に対応して、「Ornstein-Uhlenbeck 型干渉ブラウン運動」と「干渉ブラウン運動」と呼ばれる。これらのモデルは、常微分方程式の各粒子に、ブラウン運動からくるランダムな揺動を加えたものである。この確率(常)微分方程式を解くことは、ブラウン運動の効果のため、上述の力学モデルより、幾分取り扱いやすい問題になる。しかし、それでも無限次元特有の難問である。干渉ブラウン運動の構成は、1970年代後半に Lang が、3回連続微分可能かつコンパクトサポートを持つ干渉ポテンシャルという限定的なクラスで実行した。この仕事は無限個の粒子の有界領域への集中を防ぐという、無限粒子系固有の困難さを解決した、非常に優れた仕事であった。しかし著名な Lennard-Jones 6-12ポテンシャルやリースポテンシャルなど、興味深いポテンシャルは長距離干渉型であり、Lang の仕事では未解決であったが、応募者はこれらを含む極めて広大な範囲の干渉ブラウン運動を記述する無限次元確率微分方程式を解く、斬新な一般論を構築して解決した。この理論は、Dirichlet 形式理論、確率解析に深く関連するものであり、上述の常微分方程式には、直接的には使えない。しかし理論の一部には、無限粒子系の対称性のみから導いた部分があり、特に、「対称性を持つ一つの無限次元方程式は、両立性を持つ無限個の有限次元方程式の系(スキーム)と同等である」という理論の要点は、古典力学でも有効と思われる。この手法を実行するには、スキームの構成に無限次元方程式の「弱解」が必要であり、干渉ブラウン運動の場合はそこで Dirichlet 形式を用いた。ここが古典力学では適用できない。しかし、古典力学の解は、無限次元確率微分方程式の低粘性極限を用いて構成できると考えられ、問題を解決できると期待していた。

尚、干渉ブラウン運動の構成には、時間発展を対称とする不変確率測度が存在するという、可逆性が鍵となった。これを古典力学で如何に乗り越えるかは挑戦的な問題である。また、勾配型の常微分方程式の場合は、干渉ブラウン運動の低粘性極限として捉えることが期待できるが、本来の古典力学の場合は「干渉ブラウン運動」が「Ornstein-

Uhlenbeck 型干渉ブラウン運動」となる。これは時間発展について非対称である。故に、その無限次元確率微分方程式を解くことから始める必要があり、そういう意味でも挑戦的かつ萌芽的である。

#### 4 . 研究成果

本研究では、研究方法の欄で述べた無限粒子系に対するスキームを構築する手法に対して、IFC 条件という主要な条件を確かめ、理論を進展させる論文を出版した。さらにこの手法を用いて、無限次元 Dyson モデルという無限粒子系に対して、そのラベル力学としての既約性を証明した。またこのラベル力学は不変確率測度を持たないことを証明した。それを踏まえると、無限次元確率力学系として、不変確率測度を持つアンラベル力学を考察し、そのエルゴード性を証明した。これらの結果は、二つの論文で出版した。この研究の成果として、以上合計 3 つの論文を出版した。

無限粒子系の確率微分方程式を記述するうえで、重要となる IFC 条件に関する論文を完成し出版した。IFC 条件というのは、無限次元確率微分方程式の弱解が与えられた時に、 $m$  番目以降の弱解を、最初の  $m$  個の粒子を記述する有限次元確率微分方程式のランダムな係数とみなしたとき、 $m$  粒子系の方程式が、一意的な強解をもつという主張である。つまり、無限次元方程式を、無限個の有限次元方程式の列に分解するための条件である。一旦、これが実行できると、無限次元方程式の解析が、有限次元方程式の解析に変換できる。それぞれの有限次元方程式は確率微分方程式であり、本研究が目指す(ブラウン運動の項を持たない)常微分方程式ではないが、この段階で、本研究に必要な、低粘性極限をとることが期待できる。従って、この結果は目標に向かう重要な一步となっている。

注目すべきは、ここで、Dirichlet 形式理論を使用していないという点である。低粘性極限では、極限に於いて、時間発展に関して非対称な対象が現れるので、対称 Dirichlet 形式を使用する議論を本質的に避けなければならない。この論文では、確率微分方程式としての構造だけを使用しており、Dirichlet 形式の持つ時間発展についての対称性を使用していない。今後、現段階の解の評価が、粘性によらない形にさらに精密化する必要があるが、この結果は、将来有効になると思われる。

上述の手法を用いて、無限次元 Dyson モデルという無限粒子系に対して、そのラベル力学としての既約性を証明した。これは、個々の粒子を区別するという意味で、ラベル力学に対して証明したものであり、「第二 tail 定理」という最近構築した一般的定理の応用となっている。

問題の難しさは、無限次元であるため、基礎になる測度が存在しないことである。したがって、遷移確率密度の存在が不明となる。にもかかわらず、規約性を証明した点である。無限粒子系を無限個の有限粒子系の両立性を持つ族と捉え直し、各有限粒子系の力学の規約性から、両立性を用いることによって、無限粒子系まで結果を持ち上げる、という手法を使用している。この極限操作が実行できるのは、第二 tail 定理のおかげである。

このラベル力学に対しては、不変確率測度が存在しないことも証明した。実際、Sphon による、Dyson モデルの tagged 粒子の運動の log 増大の結果を用いることにより、ラベル力学に関しては、不変確率測度が存在しないことを証明した。ソフトエッジ及びハー

ドエッジに付随する、ランダム行列に関する1次元の干渉ブラウン運動である、Airy 干渉ブラウン運動、及び、Bessel 干渉ブラウン運動では、ラベルダイナミックスの確率測度が存在する。故に、この結果は、bulk の確率力学の特徴を表している。なお、この規約性を証明した論文は、2022 年に出版した。

ラベル力学の不変確率測度が存在しない以上、エルゴード性を追求する枠組みとして、アンラベル力学が研究の対象になる。Dyson モデルのアンラベル力学に関して、これは普遍確率測度が逆温度 2 の sine 点過程となるが、これから構成されるパス空間の保測変換に対して、そのエルゴード性を証明した。手法として、上述のスキームが本質的に使用されている。この結果は、無限粒子系に対する新理論の応用例の一つとなっている。この結果は、論文として 2023 年に出版した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Kawamoto, Y., Osada, H.	4. 巻 3
2. 論文標題 Dynamical universality for random matrices	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-022-00154-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Osada Hirofumi, Tanemura Hideki	4. 巻 177-3-4
2. 論文標題 Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail -fields	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Probability Theory and Related Fields	6. 最初と最後の頁 1137-1242
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00440-020-00981-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kawamoto Yosuke, Osada Hirofumi, Tanemura Hideki	4. 巻 -
2. 論文標題 Uniqueness of Dirichlet Forms Related to Infinite Systems of Interacting Brownian Motions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Potential Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11118-020-09872-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Osada Hirofumi, Tsuboi, Ryosuke	4. 巻 394
2. 論文標題 Dyson's model in infinite dimensions is irreducible	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Springer, Singapore	6. 最初と最後の頁 401-409
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-981-19-4672-1_21	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kawamoto, Yosuke, Osada, Hirofumi, Tanemura, Hideki	4. 巻 74
2. 論文標題 Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail $\phi$ -fields II: the IFCcondition	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 79-128
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/85118511	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Osada Hirofumi, Osada, Shota	4. 巻 64
2. 論文標題 Ergodicity of unlabeled dynamics of Dyson's model in infinite dimensions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0086873	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 長田博文
2. 発表標題 Dynamical universality for random matrices and uniqueness of solution of ISDE
3. 学会等名 Workshop on "Random matrices, Determinantal point processes and Gaussian analytic functions" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

長田博文ホームページ  
[https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~osada-labo/osadapersonal\\_hp/index.html](https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~osada-labo/osadapersonal_hp/index.html)

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------