

令和 5 年 6 月 13 日現在

機関番号：32660

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2022

課題番号：20K22130

研究課題名（和文）制約条件下における連続時間ポートフォリオ最適化の数値解析

研究課題名（英文）Numerical analysis of continuous-time portfolio optimization under no-short selling and leverage constraints

研究代表者

家田 雅志（IEDA, Masashi）

東京理科大学・経営学部ビジネスエコノミクス学科・講師

研究者番号：50876068

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：連続時間ポートフォリオ最適化問題において「空売り禁止・借入金上限設定」の条件を付与した状態での最適ポートフォリオ戦略について研究を行った。投資のよし悪しの判断は投資家が保有する全資産の合計価値と目標運用金額の下方二乗平均誤差などを中心に定量的基準を設けた。最適戦略はカーネル選点法に改良を用いたものを用いて数値的に算出し、実際の市場データも活用しつつ与えられた市場環境でどのような運用目標であれば安定的に達成できるかを定量的に明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究において付与した「空売り禁止・借入金上限設定」は、機関投資家などの実務家の資産運用においては必須条件である。しかし、これまでの連続時間ポートフォリオ最適化問題において上記の条件を明示的に組み込んだ論文はなかった。したがって本研究の成果は現実的に採用可能な連続時間最適ポートフォリオ戦略を提供する学術的成果であり、本研究をベースに社会実装への展開が期待できる。

研究成果の概要（英文）：We studied a continuous-time portfolio optimization problem under the no short-selling and leverage constraints. Our investment criterion is based on the error between the investor's wealth and the pre-determined target wealth level. We obtained the optimal strategy numerically using an improved version of the kernel-based collocation method. We applied it to the Japanese market data and quantitatively clarified the target wealth level attained stably in a given market environment.

研究分野：数理ファイナンス

キーワード：最適投資問題 ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式 数値解析

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

金融工学における学術的主要課題の一つとして、機関投資家のポートフォリオ最適化がある。現在、機関投資家が採用する数理モデルは多くの場合、投資開始時点で設定したポートフォリオ投資戦略(以下、投資戦略)を投資期間全体で維持する一期間投資モデルである。一期間投資モデルは投資目標の直感的理解や実務的制約条件付与が容易である一方、投資期間中の情勢変化には対応できない。これは長期的な資産投資を行う年金基金などにとって非合理的であるため、動的な投資戦略を明示的にモデル化する必要がある。

動的な投資戦略に関する主要な学術研究として、投資期間を連続的に捉える連続時間投資モデルが挙げられる。連続時間投資モデルに対する主流の解析方法は解析的明示解の導出である。しかし、研究代表者の年金積立金管理運用独立行政法人(GPIF)のデータを適用した実証分析では、解析的明示解を用いると運用目標の安定達成に大量の空売りを必要とすることが明らかにされており、機関投資家にとり現実には実行不可能である。一方、明示解の導出可能な問題設定は限られており、空売り禁止などの制約条件を考慮する問題では導出が困難となる。従って、現実には実行可能な投資戦略を得るためには数値解析が不可欠である。

## 2. 研究の目的

研究代表者らはこれまでの研究で、空売り禁止を考慮した連続時間モデルの数値解法を考案し、市場データを用いた分析により運用目標を空売りなしに安定達成可能であることを示した。しかし、安定達成には多額の借入が前提であることも確認されたため、借入を制限した状況でも運用目標が達成されるかは不透明であった。

そこで、本研究では、まず機関投資家が要請する「空売り禁止・借入金上限設定」の制約下において連続時間ポートフォリオ最適化に対する数値解析ツールを構築する。さらに、このツールにおいて運用目標を設定し算出される最適投資戦略を数値検証することで、与えられた運用資産に対して、どのような運用目標であれば安定的に達成できるかを明らかにすることを目的とした。

## 3. 研究の方法

連続時間ポートフォリオ最適化問題は Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式と呼ばれる最適化を含む偏微分方程式によって特徴づけることができる。本研究では偏微分方程式の数値解法として資産間相関が存在する場合にも適用可能な方法であるカーネル選点法を採用した。最適化パートについては制約付き二次計画問題としての定式化したことで各点最適化は必要であるものの比較的低い計算負荷で計算可能である。カーネル選点法と合わせて数値計算全体でかかる計算負荷が比較的抑えられているため実運用においても採用が期待しやすい形式となっている。

資産運用戦略の良し悪しは、事前に定めた目標収益率と初期投資額から計算される目標運用金額と、運用実績金額の乖離度合によって評価する。より具体的には両者の差を引数とする(1) 下方平均二乗誤差、(2) 指数関数型評価関数、の2つを導入し、運用実績額が目標運用金額を下回る場合にペナルティーがかかる構造とした。前者は直感的に理解しやすい点だが、後者はペナルティー強度をパラメーターとして制御可能な点の特徴である。

## 4. 研究成果

### (1) 下方平均二乗誤差基準における最適ポートフォリオ戦略の数値解析

本研究第1の成果は、研究代表者が過去に解析したポートフォリオ最適化問題を更に直感的に理解しやすく数値解析時の計算負荷を低減する形で再定式化した点である。既存の定式化は空間方向に対する2変数の偏微分方程式であり境界条件も不明であったが、空間方向1変数で同等の問題を表現可能な数理モデルを提案し、かつ本研究の新規モデルにおいては境界条件も特定できた。これらは計算負荷の低減と安定的な数値計算精度の確保に寄与するもの。

本研究第2の成果は、制約付き最適投資問題を記述するためのハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式に対する数値解析の具体的な実装を示した点である。本研究で用いたカーネル選点法は広く偏微分方程式に適用可能であるが、他の数値解析手法と同様に具体的な実装時には数値解を安定的に得るために幾らかの工夫が必要となる。そのため、本研究により具体的な実装が示されたことにより最適投資問題の研究におけるさらなる応用的な研究展開が期待できるようになった。

## (2) 指数関数型評価基準における最適ポートフォリオ戦略の数値解析

本研究の成果は(1)と同条件の環境下で評価関数を変更し、最適運用戦略の安定性について深堀を行った点である。特に指数関数型の評価関数を用いた場合、下方二乗誤差による評価と対比して終端時刻におけるパフォーマンスの劣化が大幅に改善することを明らかにした。これは評価関数の滑らかさが向上したことにより、値関数の数値計算結果が安定した結果が運用戦略にも影響したものであると考えられる。こちらのケースにおいても実市場データを用いた分析により、評価関数内のパラメータ調整などについて実運用に向けた知見を定量的に示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masashi IEDA	4. 巻 2022
2. 論文標題 Continuous Time Portfolio Optimization with Twice Integrated Kernel-Based Collocation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications, 2022	6. 最初と最後の頁 80-85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5687/sss.2022.80	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masashi IEDA	4. 巻 29
2. 論文標題 Continuous-Time Portfolio Optimization for Absolute Return Funds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Asia-Pacific Financial Markets	6. 最初と最後の頁 675-696
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10690-022-09365-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Masashi IEDA
2. 発表標題 Continuous Time Portfolio Optimization with Twice Integrated Kernel-Based Collocation
3. 学会等名 The 53rd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 家田雅志
2. 発表標題 資産構成制約を考慮したベンチマーク追尾型ポートフォリオ最適化
3. 学会等名 日本応用数理学会 2021年研究部会連合発表会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------