

令和 4 年 4 月 23 日現在

機関番号：32702

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2021

課題番号：20K22138

研究課題名(和文)人工回路網を用いたデリバティブの価格付け

研究課題名(英文)Artificial Neural Network for Option Pricing

研究代表者

舟橋 秀治 (Funahashi, Hideharu)

神奈川大学・経済学部・准教授

研究者番号：40884383

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、人工回路網(ANN)の技術と漸近展開法などの近似手法を組み合わせることによって、デリバティブ価格を高速かつ安定的に、高い近似精度で評価する手法を開発した。特に、本手法を原資産価格が確率ボラティリティモデルに従う場合におけるヨーロピアン・オプションやバリア・オプションの価格付けに応用し、従来の手法と比べて、学習データ数を100～1000分の1に抑えながら、ハイパーパラメータ(隠れ層やノードの数)を従来の半分以下に設定しても、デリバティブ価格をこれまでよりも精度よく推定できることを証明した。また、本手法を金融実務上重要なSABRモデルへと応用し、数値例を通してその有用性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

金融実務におけるデリバティブの価格付けには、モンテカルロ法に代表される数値計算法や漸近展開などの近似手法が広く用いられている。しかし、前者は膨大な計算時間を要し、後者は満期が長く、ボラティリティが大きい商品では近似精度が著しく劣化するという難点がある。本手法を用いることで、従来は数値計算法に頼るしかなかった金融商品でも、近似解と同程度の計算速度で、安定的にデリバティブの価格を計算できるようになった。金融機関で扱われる金融商品は取引額が大きく、僅かな推定誤差でも巨額の損失が生じる可能性があることから、機械学習を精度良く高速に実行する必要がある。本手法の金融実務に対する貢献は大きい。

研究成果の概要(英文)：In this research, we propose a mixed approach of asymptotic expansion (AE) and artificial neural network (ANN) methods for derivative pricing to improve computational speed, stability, and approximation accuracy. We apply our method to European and barrier options when the underlying asset price follows stochastic volatility model. According to the results, our ANN enables more accurate predictions for derivatives prices and training becomes more robust and requires much less training data, only one in a hundred or one in a thousand, with smaller hyperparameters (i.e., layers and nodes), half or less, than previously proposed methods. We further examine our ANN method in conjunction with the SABR model, a popular stochastic volatility model that is widely used in financial practice, then present the simulation and experimental results to demonstrate the effectiveness of our approach.

研究分野：金融工学

キーワード：人工回路網 デリバティブ モンテカルロ法 漸近展開 機械学習 確率ボラティリティモデル ディープラーニング

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

金融実務における資産価格(株式、為替、金利、クレジットなど)を表現するモデルとして、局所ボラティリティモデル(LVM)や確率ボラティリティモデル(SVM)が広く用いられている。しかし、これらのモデルを仮定とした場合、デリバティブ価格の解析解は特別な場合を除いて存在しない。

そのため、複雑なデリバティブの近似解を算出する研究が数多くなされてきた。特に、漸近展開法(複雑な関数を扱いやすい関数列の級数として近似すること)を用いた近似解は実務で広く用いられている。例えば、Hagen (2002)は、特異摂動法を用いて原資産価格が SVM モデルの一つである SABR モデルに従う場合のヨーロッパ・オプション(EO)価格を算出し、Takahashi (1999)では、小分散漸近展開を用いることで、LVM のもとでの EO 価格の近似式を算出した。Funahashi (2014)では、Wiener Ito chaos (WIC)展開法と呼ばれる近似手法を提案し、LVM のもとでの EO 価格の近似式を算出した。また、最近では、バリア・オプションのような複雑なデリバティブでも、漸近展開法を用いれば、かなり精度の良い近似解が算出できるようになった(例えば Funahashi and Higuchi (2018)を参照)。

これらの近似手法は、デリバティブ価格やそのリスク指標を効率的に算出することを可能とするが、高次の近似を導くためには理論的に煩雑になるだけでなく、数値計算のコストも指数関数的に跳ね上がる。したがって、近似精度が劣化するような、ボラティリティが高くオプションの満期が長いケースなどでは、有効な手段とは言えない。このような場合、実務では、モンテカルロ法(MC)などを用いて解を求める数値計算法が広く支持されているが、これらの方法は膨大な計算コストを要することが知られている。このように、近似精度や計算速度の制約から、近似手法や数値計算法には限界があり、実務上のボトルネックになっている。

一方、昨今の機械学習の金融への応用は著しい発展を遂げており、数値計算法に変わって計算コストの問題を解決すると期待されている。Spiegel et al. (2018)は人工回路網(ANN)の技術を用いてアメリカン型やバリア型オプションの価格を算出することに成功した。しかしながら、前者で 100,000、後者でも 10,000 もの学習データを必要としており、各学習データを計算するために数値計算が必要となることから、その計算負荷は決して低くはない。Hernandez (2017)では、人工回路網を用いてモデルのパラメータをオプション市場で観測されるインプライド・ボラティリティにキャリブレーションする方法を提案した。しかし、本手法は誤差が伝わるうちに増幅される勾配発散のため、精度が悪く実務には耐えられないことが指摘されている。これは、例えば EO におけるベガのように、デリバティブのリスク指標(グリークス)が釣り鐘型の形状をしていることがあり、その勾配が急激に変化することに起因する。

人口知能(AI)を用いれば、数値計算法とは比較にならないほど高速に派生証券の価格を計算することが可能であるし、モデルや商品ごとに異なった近似手法を開発する必要もない。しかし、金融機関で扱われるデリバティブは取引額や取引量が大きく、僅かな推定誤差でも巨額の損失を生じる可能性がある。このため、デリバティブの価格付けに AI を用いるには、まだ多くの克服すべき課題残っており、現状では AI を用いてデリバティブを価格付けしている金融機関は殆どないのが実情である。

これらの欠点を改善することが本研究の着想に至った経緯である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、ANN の技術と WIC をはじめとした漸近展開法などの近似手法を組み合わせることで、デリバティブ価格を高速かつ安定的に、高い近似精度で評価する手法を開発することである。

具体的には、これまでの一般的な手法とは違い、デリバティブの価格(C)をそのまま人工回路網で学習・推定(C_{ANN})するのではなく、デリバティブの価格とその漸近近似より算出した近似解(C_{App})の差($D = C - C_{App}$)を ANN に学習させ、デリバティブの(ANN による推定)価格を $C_{ANN}^D = D_{ANN} + C_{App}$ とする。ここで、 C_{ANN} と D_{ANN} は各々 C と D を ANN で学習した後に、その結果を用いて ANN が推定した値であり、学習の結果である D_{ANN} と近似解 C_{App} は非常に高速に計算できるため、その和である C_{ANN}^D も同様に計算速度が速い。

デリバティブの価格として C_{ANN}^D を用いることで、理論値 C 近傍の値 C_{App} から推定を始めることができるので、安定性が増し、収束の速度が上がることが予想される。さらに、ANN の学習効率を著しく劣化させていた釣り鐘型のリスク指標が解消されることも期待できる。

なお、ANN の利点として、計算機構を offline(学習データを作成し、ANN に学習させる)と online(学習結果を用いて、デリバティブの価格を推定する)に分けることができる。前者は、数値計算法を用いて、デリバティブの価格(C)を大量の学習データ数分だけ計算した上で、そのデータを ANN に学ばせるために時間を要するが、一度学ばせればその結果を以後使いまわすことができる。一方、日々のプライシングでは、offline で学んだ学習結果を用いて、 C_{ANN}^D を計算すればよいので、高速計算が可能となる。

本手法の有用性が確認されれば、これまでモンテカルロ法に代表される数値計算法を用いることで、膨大な計算コスト(大量のサーバーの購入やその維持管理に必要な人件費を含む)を

支払っていた金融実務の負荷を大幅に削減できるため、その意義は大きい。

3. 研究の方法

本手法をまず比較的計算コストの低いヨーロッパ・オプションに当てはめ、従来のモンテカルロ法や人工回路網を用いた価格付けと比べて、高速でかつ安定的に計算できることを検証した。また、学習データ数を 100~1000 分の 1 程度に抑えながら、人工回路網の隠れ層やノード数（ハイパーパラメータ）を従来の半数以下に設定しても、従来よりもデリバティブの価格を安定的に計算できることを確認した。

具体的には、以下の手順で検証を進めた。

乱数を用いて、市場データやモデルのパラメータを作成し、1,000~100,000 程度の入力パラメータを作る（その内 80%を学習データ、20%をテスト・データに分割）。

Funahashi (2014)で導いた近似解(C_{App})をC++などのプログラミング言語を用いて実装し、求めたデリバティブ価格との差($D = C - C_{App}$)を計算する。

本研究助成金を用いて購入した高性能パソコンを使い、人工回路網にCとDを学習させ、テストデータ(200-20,000)を用いて $C_{ANN} - C$ と $C^D_{ANN} - C$ を計算し、その平均と分散を検証し、後者を用いれば学習データ数を抑えても近似精度が高いことを示した。

さらに、本手法を金融実務上重要な SABR モデルやより複雑なデリバティブに適用して、数値実験を通してその有用性を証明した。

4. 研究成果

本研究課題の核心となるテーマについて2つの論文を国際学術誌(査読つき)と国内誌に発表し、本研究から派生した1つの論文を国際学術誌(査読つき)に発表した。

Funahashi (2021a)では、原資産価格が確率ボラティリティモデルに従う場合におけるヨーロッパ・オプションやバリア・オプションの価格付けに対して、人工神経回路網の技術を導入することで、高速かつ高い精度で派生証券価格を計算することが可能となった。本手法を用いれば、従来は数値計算法に頼るしかなかった商品でも、近似解と同程度の計算速度で、より安定的にデリバティブの価格を計算できることを示した。

本手法は、これまで研究されてきた一般的な ANN の手法とは異なり、ANN に派生証券価格を直接学習させることを避け、派生証券価格とその近似解との差を ANN に学ばせることで、従来の手法と比べて、学習データ数Nを 100~1000 分の 1 に抑えながら、ハイパーパラメータ（隠れ層やノードの数）を従来の半分以下に設定しても、派生証券価格を安定的に推定することができる。一例として、表1（Funahashi (2021a)の Table 2 から引用）に、ブラック・ショールズモデルを仮定し、ヨーロッパ・オプション価格を ANN で直接学ばせた場合(C_{ANN})及び近似解との差を学習させた結果(C^D_{ANN})が理論値(C^A)からどの程度乖離するかを示すため、データ数(学習データとテスト・データの合計数)及びハイパー・パラメータ(活性化関数(activation Function)、隠れ層(hidden layer)、ノード(node)数)を変化させ、テスト・データを用いて、乖離の平均(mean)及び分散(variance)を計測した結果を示した。表から明らかとなっており、 $N = 1,000$ で計算した C^D_{ANN} の方が、 $N = 10,000$ で計算した C_{ANN} よりも平均、分散ともに小さく(2桁オーダーが違う)、理論値に近いことが確認された。また、 C^D_{ANN} の方が活性化関数、隠れ層やノード数に影響を受けにくく、 C_{ANN} を推定した際の半分以下に設定しても、派生証券価格を安定的に学習した。さらに、原資産価格を確率ボラティリティモデルに変えて、より複雑なデリバティブであるバリア・オプションを評価した場合でも同様の結果が得られた。

以上の結果から、本手法を用いれば offline に必要な学習データの数を大幅に削減できるため、データを生成する MC などの数値計算の回数や ANN の学習時間を大幅に削減できるのみならず、少ないデータ数でもより精度の高い、デリバティブ価格の推定が可能となった。

表1 データ数(N = 1,000~10,000)及びハイパー・パラメータを変化させた時の C_{ANN} 及び C^D_{ANN} の理論値 C^A からの乖離の平均と分散及び ANN の学習や推定に要した計算時間。

#data	Hyperparameters			$C^S_{ANN} - C^A$				$C^D_{ANN} - C^A$			
	Activation Function	#hidden layer	#node	mean	variance	computational time		mean	variance	computational time	
						Offline	Online			Offline	Online
1000	ReLU	3	16	-0.6339	1.2127	193.4 s	38.06 μ s	0.0073	0.0024	194.8 s	31.58 μ s
1000	ReLU	5	64	-0.2185	0.6317	318.7 s	34.50 μ s	0.0258	0.0050	319.8 s	30.53 μ s
1000	ReLU	7	64	0.1937	0.3683	294.0 s	37.23 μ s	-0.0004	0.0039	298.5 s	35.42 μ s
10 000	ReLU	3	16	0.1892	0.1089	1407 s	24.22 μ s	-0.0084	0.0010	1383 s	21.55 μ s
10 000	ReLU	5	64	0.3822	0.1212	1695 s	39.18 μ s	0.0056	0.0026	1671 s	32.01 μ s
10 000	ReLU	7	64	-0.2777	0.2151	1906 s	51.85 μ s	-0.0382	0.0072	1903 s	52.50 μ s
1000	softmax	3	16	0.1093	0.5965	82.73 s	41.10 μ s	-0.0064	0.0011	92.20 s	25.18 μ s
10 000	softmax	3	16	0.1412	0.1896	792.4 s	33.03 μ s	-0.0007	0.0003	771.6 s	30.32 μ s
10 000	softmax	5	16	0.0059	0.0725	939.2 s	27.42 μ s	0.0672	0.0027	925.5 s	30.49 μ s

舟橋 (2021)では、特異摂動法と ANN の技術を組み合わせることで、本手法を SABR モデル(Hagen (2002))へと応用し、数値例を通してその有用性を証明した。SABR モデルは、市

場で観測される為替やスワップション（金利デリバティブ）のインプライド・ボラティリティ（市場で取引されているオプション価格から逆算して導き出されるボラティリティ）の補完や補外、コンスタント・マチュリティ・スワップ（主要な金利デリバティブのひとつ）の価格付けに用いられており、実務上重要な役割をはたしている。図1（舟橋（2010）の図4から引用）は、SABR モデルの下でのオプション満期1年（5年）、スワップ期間5年（10年）のスワップションの価格（ C_{ANN} 、 C_{ANN}^D 、MCの結果及び Hagan (2002)の近似解(C^A)）から、算出したインプライド・ボラティリティを載せた。用意したデータ数は、4,000($N = 4000$)であるが、図から明らかとなっており、 C_{ANN}^D が C^A や C_{ANN} より、MCの結果に近いことが確認できる。

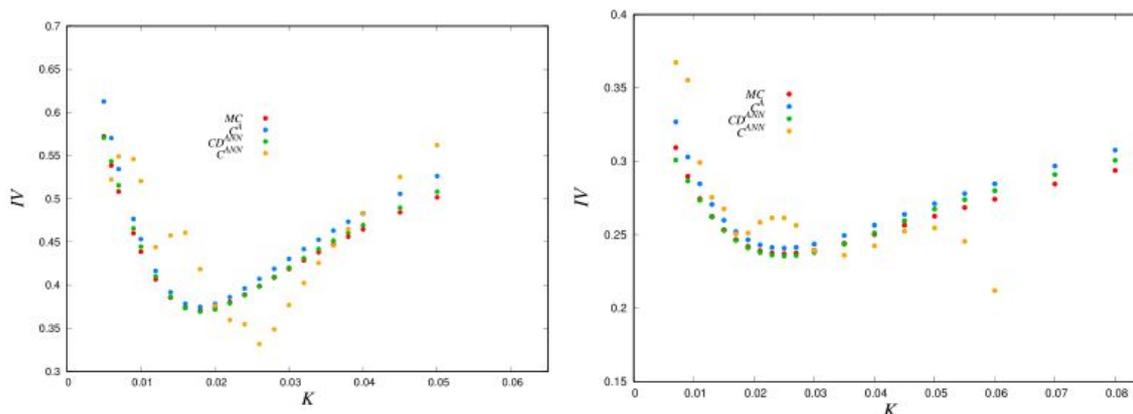


図1 左（右）パネルは、SABR モデルの下でのオプション満期1年（5年）、スワップ期間5年（10年）のスワップションの価格（ C_{ANN} 、 C_{ANN}^D 、MCの結果及び Hagan (2002)の近似解(C^A)）から、算出したインプライド・ボラティリティを表している。

また、本手法を SABR モデルに適用することで、Hagan の近似式では精度が十分できなかった、行使価格が ATM から離れた deep in the money や deep out of the money でも、ANN による補正により高い精度で近似できることが分かった。また、2007年頃に顕在化した米国のサブプライム問題に端を発した金融危機を経て、各国がゼロ金利政策に舵を切り、2009年にはスイスの中央銀行が負金利を導入し、欧州や本邦もこれに続いた。このため、実務では負金利に対応した SABR モデルが実務家から支持を受けているが、満期が長く、ボラティリティが高い場合などでは、既存の解析解の近似精度は十分ではない。そこで、本手法を用いることで、より精緻な近似手法を開発した。これらの結果は、英語論文として投稿する予定である。

また、Funahashi (2021b)では、確率ボラティリティモデルの下でヨーロッパ・オプションの価格を高い精度で計算する近似手法を開発し、原資産がフラクショナル確率ボラティリティモデルに従う場合をはじめ、モデルの市場へのキャリブレーションを効率的かつ高精度の可能にする手法を開発した。本研究は、当初の研究計画にはなかったが、より精度の良い近似手法を開発することで、今回開発した手法を用いた ANN における派生証券価格の推定精度を上げることができるため、本研究に繋がるテーマであると考えて取り組んだ。

<引用文献>

- Funahashi, H. (2014), "A chaos expansion approach under hybrid volatility models," *Quantitative Finance*, **14**(11), 1923-1936
- Funahashi, H. (2021a), "Artificial Neural Network for Option Pricing with and without Asymptotic Correction," *Quantitative Finance*, **21**(4), 1923-1936
- Funahashi, H. (2021b), "Replication Scheme for the pricing of European Options," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **24**(3), 2150014
- Funahashi, H., and T. Higuchi (2018), "An analytical approximation for single barrier options under stochastic volatility models," *Annals of Operations Research*, **266**(1-2), 129-157
- Hagan P., D. Kumar, A. Lesniewski and D. Woodward (2002), "Managing smile risk," *Wilmott Magazine*, **September**, 84-108
- Hernandez, A. (2017), "Model calibration with neural networks," *Risk*, **June**, 1-5
- Spiegel, J.D., D. Madan, S. Reyners, and W. Schoutens (2018), "Machine learning for quantitative finance: Fast derivative pricing, hedging and fitting," *Quantitative Finance*, **18**(10), 1-9
- Takahashi, A. (1999), "An asymptotic expansion approach to pricing financial contingent claims," *Asia-Pacific Financial Market*, **6**, 115-151.
- 舟橋 秀治, 派生証券の価格評価における人工知能の活用とその展望, *経済貿易研究*, 2021, 47巻, 23-37

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Funahashi Hideharu	4. 巻 21
2. 論文標題 Artificial neural network for option pricing with and without asymptotic correction	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Quantitative Finance	6. 最初と最後の頁 575 ~ 592
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/14697688.2020.1812702	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 舟橋秀治	4. 巻 47
2. 論文標題 派生証券の価格評価における人工知能の活用とその展望	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 経済貿易研究 研究所年報	6. 最初と最後の頁 23-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 FUNAHASHI HIDEHARU	4. 巻 24
2. 論文標題 REPLICATION SCHEME FOR THE PRICING OF EUROPEAN OPTIONS	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Journal of Theoretical and Applied Finance	6. 最初と最後の頁 2150014 ~ 2150014
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S021902492150014X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 舟橋 秀治
2. 発表標題 Deep learning and asymptotic expansion for derivative pricing
3. 学会等名 金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------