

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 9 月 9 日現在

機関番号：21201

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2021

課題番号：20K22245

研究課題名（和文）ICTを活用した数学実験・実験数学による生徒の主体性の涵養の試み

研究課題名（英文）An Attempt to Cultivate Students' Autonomy through Mathematics Experiments and Experimental Mathematics Using ICT

研究代表者

田村 篤史（TAMURA, Atsushi）

岩手県立大学・ソフトウェア情報学部・准教授

研究者番号：00882002

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：動的幾何学ソフトウェアを用いた実験を通して理解を深める，射影幾何・球面幾何・タクシージ何に関する教材を開発した。射影幾何の教材については，生徒の想像力を刺激するとともに論理性の涵養に役立つ，わが国では報告例のない新提案ができたと考えている。この提案に関しては，査読付き論文として採録された。

球面幾何とタクシージ何の教材については，指導学生2人のそれぞれが県内進学校の高1・高2に対して授業を行い，日本教育工学会全国大会でその成果を報告した。学生らが行った授業において質問紙調査を行ったところ，ソフトウェアの有効性ととも，各教材が学力の低い層にも働きかけ，生徒の興味や主体性を引き出すとの示唆を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来から学校現場では「日本の生徒は数学の現実場面への適用力が弱い」と指摘されており，主体性の涵養や学術的に考える資質・能力の育成も課題になっていた。実際，新学習指導要領でも「生徒の主体的・対話的で深い学びの実現を図る」，「日常生活や社会の事象の数学化」等が求められている。この現状を踏まえ，新課程では「理数探究」等が設置され，上記の課題の解決が期待されている。

本研究では，射影幾何や球面幾何等のある種の現実場面を，生徒がGeoGebraを用いた実験数学によって解決する教材を開発した。現実場面の課題を解決する授業への変換を見据え，新課程・理数探究に対応した1つの問題提起ができたと考えている。

研究成果の概要（英文）：I developed teaching materials on projective geometry, spherical geometry, and taxicab geometry. All of them are designed to deepen students' understanding through experiments using GeoGebra.

For projective geometry, I believe that I have made a new proposal that has not been reported before in Japan, which stimulates students' imagination and helps them to cultivate their logical thinking. This proposal has been accepted as a refereed paper.

The teaching materials on spherical geometry and taxicab geometry were taught to first- and second-year high school students at a local school in the prefecture by two students. Both students reported their results at conference of the Japan Society for Educational Technology. A questionnaire survey was conducted in the classes conducted by the students, and the results indicated that the software was effective and that each of the materials could reach out to students with low academic ability and elicit their interest and initiative.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学教育 非ユークリッド幾何学 動的幾何学ソフトウェア 探究学習 主体性 思考実験

1. 研究開始当初の背景

大阪大学 山本芳彦 教授によれば、「数学実験」とは、的確な実験により、知識、技術を修得し定着させることであり、「実験数学」とは、多くの実験を通して新しい知見を得ることである。それぞれの

数学実験	実験数学
実例により理解を深める こんな現象がある 実証的 数学を理解する 結果を明白に表現する	実例から予想し、証明を求める 新しい現象を見つける 発見的 数学にする、数学を作る よりよい表現を模索する

それぞれの特徴は右上表の通りである。数学の教科書においては、例、例題、問、等の一部が数学実験にあたり、問の後などに置かれる「調べてみよう」などが実験数学にあたる。

現行の学習指導要領では「課題の設定」、「調査」、「整理・分析」、「まとめ・表現」というプロセスに参加することを通して、内容知と方法知をバランスよく習得していくことが望まれている。

新指導要領でも同様のプロセスの中で、問題発見・解決を念頭に置いた深い学びが期待されている。本研究では、生徒は1年目の2学期から「数学実験」によって実験の方法とコンピュータ、インターネット、ソフトウェアの使い方を学ぶ(緊急事態宣言を受けて、授業は2学期開始とした)。3学期から「実験数学」の具体例を学び、2年目の1、2学期に、上記のプロセスを体験し、内容知、方法知を修得しつつ、生徒は新しい知見を得るべく活動を行いたいと考えている。

2. 研究の目的

本研究では上記の背景を踏まえた上で、生徒の学びに対する姿勢の変化はあるか、が問いである。数学は、問題を解くだけでなく、問題を作ること(現象の本質を数学で記述すること)でもあることを体感させ、その楽しさに触れ、「数学が使える、作れる、見いだせる」ことを実感することによって、主体性が身についていくものと予想しており、それが正しいか否か、および主体性とその他の能力との相関関係・因果関係など、周辺事項についても検証・検討する。

本研究では、上に示した問いにアプローチすることで、数学学習における生徒の主体性の涵養を目指し、新たな知見を得ることを目的とする。

1980年代に入ってから、わが国でも数学実験・実験数学に関する研究が見られるようになり、ここ10年ほどはICTと関連づけた研究が増えてきている。これらの先行研究では、新たな教材開発として、また、コンピュータやソフトウェア、機器の役割について論じられてきた。近年は、創造性の育成や探究活動に関連した研究もあるが、本研究のような主体性という情意面に関する研究は進んでおらず、独自性を有すと考える。

3. 研究の方法

当初の授業計画と生徒の評価については以下のように考えていたが、新型コロナウイルス感染症拡大に伴い、対面の授業に関しては1年目は断念せざるを得なかった。

1年目	1学期	2学期	3学期
目標	緊急事態宣言を受けて2学期開始とした	「数学実験」の具体例を通し実際にソフトウェアを使えるようにする	「実験数学」を理解し、いくつかの具体例を学ぶ
評価の要素		理解力	理解力
2年目	1学期	2学期	3学期
目標	課題を決めて「実験数学」の準備をし、実際に実験を行う 課題の設定、調査・実験、整理・分析のプロセスを踏む		実施結果を論文としてまとめ、発表・プレゼンを行う
評価の要素	主体性・実行力・問題発見力・計画力・実験遂行力		対話力・発信力

そこで、1年目はソフトウェアによる実験数学に関する非ユークリッド幾何学を題材とした教材開発に専念した。非ユークリッド幾何学は、人間の直観がおよびにくいいため、論理的思考能力の養成に適した分野であると考えられる。直観がおよびにくいということは、思考過程を視覚化しづらいということでもある。そのため昨今の社会情勢を考えると、この指導例の授業を行うにあたりICTの活用は必要不可欠である。

2年目の第2学期11月と12月に対面授業を実施し、準備段階で開発していた質問紙や自由回答を用いて、数学に興味がない、不得意と自覚している生徒に対して、以下について検討することとした。

- ・開発した教材による生徒の興味・関心・意欲の変容。
- ・開発した教材において、動的幾何学ソフトウェアによる支援の有効性。

4. 研究成果

(1) 射影幾何学を用いた教材

もし、地球が真っ平らな平面だとしたら水平線は見えるか。

真っ平らな海面上に放物線が下に凸な放物線が描かれているとき、われわれにはどのように見えるか。

この2問を、幾何学動的ソフトウェア GeoGebra を用いることにより、実験しながら解決を図る。この教材を用いて、「実験 数学モデルの構成・改良 数学モデルの共有 課題の発見 実験」というサイクルを実行することで、探究的な学習をし、結果として生徒の主体性を涵養することを目指せるようにした。

本教材は、右表のような数学的内容の特徴をもつ。いくつかの奥深い数学的内容を含んでおり、現実の延長線上にありながら無限の概念を扱っているため、生徒の想像力を刺激し、知的興味・好奇心を引き出せるものと予想する。

図1は、水平線と楕円が実際にどうぞよろしくお願いたしますのように見えるかを示したものである。格子状の座標系が無限遠点で交わる様子が描かれている。放物線は左右に無限に広がっていくわけだが、この「地球」

- ・思考実験である
 - ・無限の概念を含んでいる
 - ・連続性の概念を含んでいる
 - ・ゼノンのパラドクスを内包している
 - ・「見えるが実在しない」ことを体験する
-
- ・円錐の平面による切断面(円錐曲線)に帰着できる
 - ・スケッチすることの数学モデルを作る
 - ・射影幾何を内包している

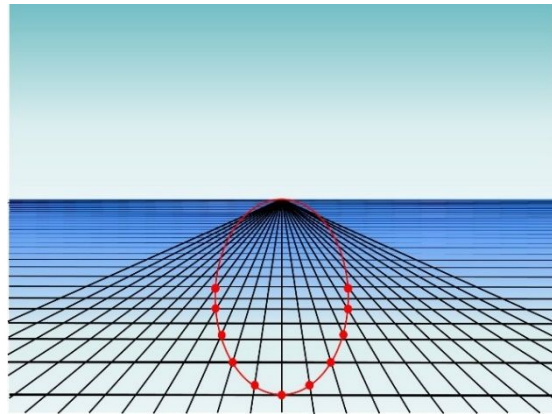


図1 水平線と放物線(楕円に見える)

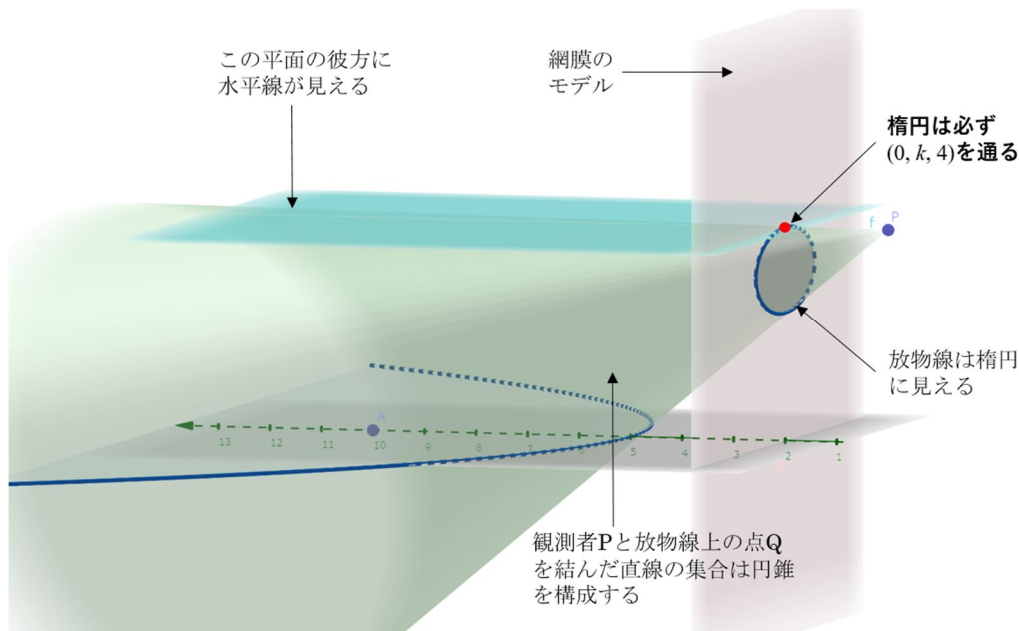


図2 GeoGebra を用いた描写

では無限遠点で交わる。これらは高校数学の範囲で証明が可能であるが(空間ベクトルの使用による)、生徒たちには GeoGebra を用いて実験的に発見することを優先させる。

図2は実際に GeoGebra を用いて描写した様子である。GeoGebra には CAS などの高度な計算機能も付加されているが、空間図形の描写に優れており、最も効果的な使用方法のひとつは空間図形に関する実験であると考えられる。

残念ながら、この教材に関しては新型コロナウイルス感染拡大のため授業で実践する機会には恵まれなかったが、教材の提案として査読付きの論文誌に掲載された。

(2) タクシー幾何学を用いた教材

タクシー幾何学とは、平面上において2点 $P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2)$ の距離 d を $d(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$ で与え、これに関する性質を調べる幾何学である(3次元以上の空間にも自然に拡張することができる)。

本教材では、1996年にタクシー幾何学を題材として出題された東京大学の個別学力試験問題をゴールに据えた。タクシー幾何学における、2点間の最短線、2点間の距離、2点からの等分点の集合、円等を表示する GeoGebra のマクロを作成し実装した。

実際の授業において、4人程度のグループで GeoGebra を用いて実験をしながら、生徒たちの

ディスカッションによってゴールに迫っていくことができるようにデザインした。授業は岩手県内陸部の進学校において冬期休暇中の課外活動の一環として、1クラス2時限の授業を行った。高1の6クラス、高2の全6クラスで実施したため合計で24時間の授業を実施した。授業者は研究室に所属する4年生の学生である。授業においては、生徒全員に対してLenovo社のChrome Bookが貸与されていたためGeoGebraのマクロはMicrosoft Teams上で配付した。

授業後に数学に興味がない生徒と不得意と自覚している生徒たちに対して、タクシー幾何学に対する興味、理解、GeoGebraの有用性について質問紙調査を実施した結果が、図3、図4、図5である。

以上から、数学に対して肯定的な気持ちをもっていない生徒に対して、タクシー幾何学は教育的に価値のある教材となりうることを、GeoGebraが生徒の興味関心を引き出せるソフトウェアである示唆を得たと考える。

(3) 球面幾何学を用いた教材

球面幾何学は、地球の表面を具体例として考えられるため、中高生にも比較的受け入れやすく、非ユークリッド幾何学の入門として適している。一方で奥深い数学的事実を有しており、生徒の興味・関心・意欲を引き出すことに成功する可能性が高いと予想した。図6は球面三角形に特有な図形の例である。図7は球面三角形の内心・外心・重心である。内心と外心は平面三角形と同様の性質をもつ。重心は3つの頂点とそれぞれの対辺の中点を結ぶ線分の交点と定義した。実際に3線分は1点で交わる。しかし、頂点：中点の比は2：1にはならない。

授業は県内南部の進学校において、11月に高1の1クラスで3時間実施した。授業者は研究室の4年生である。

授業後に生徒からの自由回答において「初めは難しく感じたけど、GeoGebraで図形を書いて理解できた」「球体の三心など新しいことが知れて楽しかった」「アプリは簡単な作業で楽しく学べたので良かった。数学に興味をもてた」「自分でこれから学んでみたい」などの肯定的な感想をもらった。タクシー幾何学と同様の一定の成果を得たと考えられる。

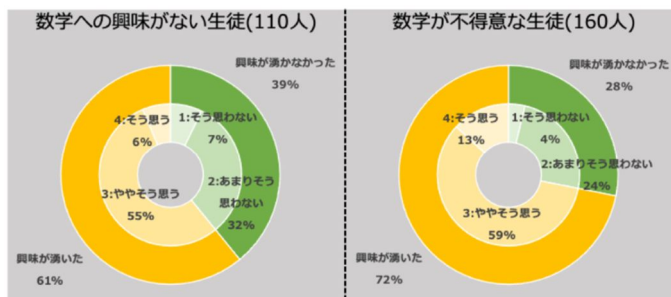


図3 タクシー幾何学に対する興味

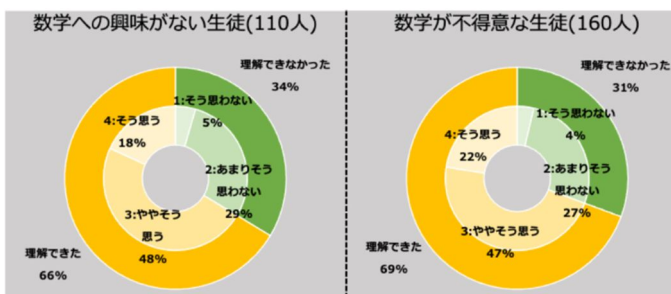


図4 タクシー幾何学の理解

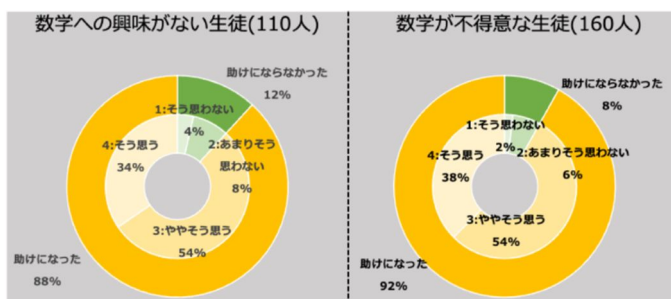


図5 GeoGebraによる支援

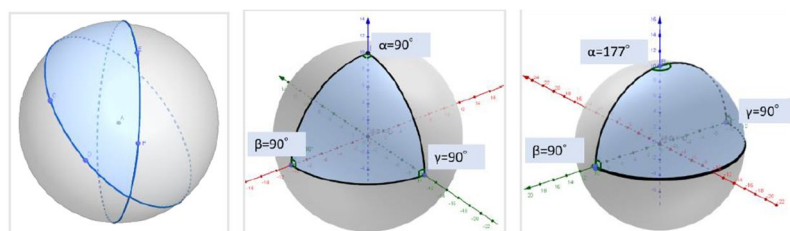


図6 球面幾何学に特有な図形

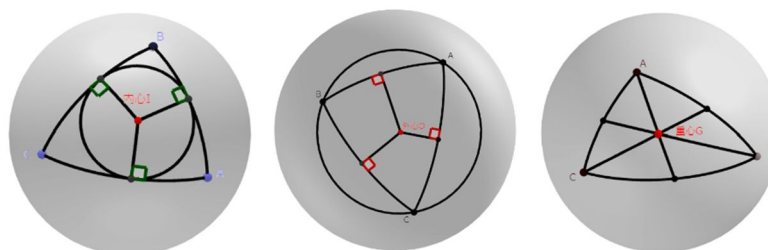


図7 球面三角形の内心・外心・重心

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 田村篤史	4. 巻 62 (3・4)
2. 論文標題 射影幾何学と動的幾何学ソフトウェアを用いた数学モデル構成教材の提案	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数学教育学会誌	6. 最初と最後の頁 39-48
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 田村篤史	4. 巻 -
2. 論文標題 射影幾何学と動的幾何学ソフトウェアを用いた数学モデル構成教材の提案	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数学教育学会2021年度春季年会予稿集	6. 最初と最後の頁 20-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件／うち国際学会 0件）

1. 発表者名 田村篤史
2. 発表標題 生徒の主体性涵養を目指す動的幾何学ソフトウェアを用いた実験数学教材の提案
3. 学会等名 全国数学教育学会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田村篤史
2. 発表標題 射影幾何学と動的幾何学ソフトウェアを用いた数学モデル構成教材の提案
3. 学会等名 数学教育学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 高橋瑛・田村篤史
2. 発表標題 数学への興味・理解が低いと認識している生徒に対するTaxicab Geometry を用いた授業実践結果の分析
3. 学会等名 日本教育工学会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田村宗一郎・田村篤史
2. 発表標題 GeoGebraを用いた球面幾何の教材開発と実践
3. 学会等名 日本教育工学会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------