

令和 4 年 5 月 18 日現在

機関番号：13101

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2021

課題番号：20K22302

研究課題名(和文)ハミルトン力学系の周期軌道とパーシステント加群の応用

研究課題名(英文)Applications of periodic orbits in Hamiltonian dynamics and persistence modules

研究代表者

折田 龍馬(Orita, Ryuma)

新潟大学・自然科学系・助教

研究者番号：30874531

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：R群と、type N の torsion-free な群が同値な概念であることを示した。type N の torsion-free な群は主要群であるため、Bredonコホモロジーを援用できるなどの道筋ができた。また、それらを用いてGG予想を一部拡張できた。また、4次元シンプレクティック多様体のシンプレクティック形式と第一Chern類の関係を調べ、与えられたハミルトニアン  $H$  に対するパーシステント加群のバーコード  $B(H)$ ,  $B(kH)$  を比較した。実際、主要群であればコホモロジーの振る舞いが良く、あるスペクトル系列が利用できることが判った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ハミルトン周期軌道の検知は、解析力学に端を発するシンプレクティック幾何学における基本的な問題であり、また、近年位相的データ解析にて盛んに研究されているパーシステントホモロジーとの関連の研究は学術的、社会的に意義がある。

研究成果の概要(英文)：In this research I dealt with Ginzburg-Gurel conjecture which states that "every Hamiltonian diffeomorphism of closed symplectic manifolds has infinitely many non-contractible periodic orbits, provided that the diffeomorphism has one orbit". Here a manifold is said to be symplectic if it admits a non-degenerate closed two-form. I investigated the problem by assuming some conditions on the fundamental group of the manifold and the symplectic form. Actually, I proved that the conjecture is true for spherically monotone symplectic manifolds whose fundamental group is assumed to be virtually abelian or an R-group. During the period, I proved that the equivalence between R-groups and torsion-free group of type N. Accordingly, since torsion-free groups of type N are principal, I could apply the theory of Bredon cohomology for them.

研究分野：シンプレクティック幾何学

キーワード：シンプレクティック多様体 フレアー理論 ハミルトン周期軌道 パーシステント加群 R群

## 1. 研究開始当初の背景

申請者の専門分野は、幾何学、特に位相幾何学(トポロジー)やシンプレクティック幾何学である。申請者の研究対象であるシンプレクティック多様体は、解析力学における相空間(phase space)の一般化であり、物理学との関連からも重要な研究対象となっている。ニュートンの運動方程式をハミルトン形式で記述すると、シンプレクティック多様体上にハミルトン力学系が与えられる。また、フレアーホモロジーは、シンプレクティック多様体を分類する不変量であり、様々な応用がなされてきた。従って、フレアーホモロジーの生成元であるハミルトン周期軌道の存在の把握が重要である。本研究では、パーシステント加群の理論を援用することによりフレアーホモロジー(の拡張版)の構造を解明し、ハミルトン周期軌道の存在問題へアプローチする。

Conley と Zehnder は、一連の研究の発端となる次の定理を証明した:「トーラスのハミルトン微分同相写像は周期軌道を無限個持つ。」この定理を元に Conley は、次の予想を提起した(コンレイ予想):「任意の閉シンプレクティック多様体のハミルトン微分同相写像は周期軌道を無限個持つ。」現在コンレイ予想は「多くの」シンプレクティック多様体に対して肯定的に解決されている。それを受けて Ginzburg と Gurel は、周期軌道のうち非可縮なものに着目し、次の予想を提起した(GG 予想):「任意の閉シンプレクティック多様体のハミルトン微分同相写像は、非可縮周期軌道を少なくとも1つ持てば無限個持つ。」実際に彼らは、「非トーラス状」であるか「トーラス状単調」であるようなシンプレクティック多様体に対しては、ギュレル予想が正しいことを証明した。コンレイ予想は、上述のトーラスに対する定理が発端であった。それでは、GG 予想はトーラスについて正しいのだろうか。また、「非トーラス状」や「トーラス状単調」という仮定は技術的な理由に依るものである。その仮定を撤廃(あるいは、自然な仮定へ緩和)できないだろうか。実際、報告者は「基本群が仮想的 R 群であるような単調なシンプレクティック多様体」に対して GG 予想を解決した。これは、上述の Ginzburg と Gurel らによる結果を真に包含するものである。従って、基本群に課した仮定の撤廃が目標となる。

## 2. 研究の目的

Ginzburg と Gurel は GG 予想を研究する過程で、通常フレアーホモロジーを用いた。しかし、「非トーラス状」や「トーラス状単調」という仮定を撤廃するには、生成元として無限個の周期軌道を許容するフレアー・ノビコフホモロジーを扱わなければならない。非可縮周期軌道に対するフレアー・ノビコフホモロジーは、生成元にフィルトレーションを入れることによりパーシステント加群を成す。パーシステント加群の理論を用いると、フレアー・ノビコフホモロジーの変容(例えば時間発展)を記述することができる。ここでは、周期軌道が非可縮であることが本質的である。なぜならば、フィルトレーションを入れない限り非可縮周期軌道に対するフレアー・ノビコフホモロジーは消滅するからである(この観点からも、非可縮周期軌道は存在しにくいことが伺える)。本研究の目的は、パーシステント加群の理論の援用による、フレアー・ノビコフホモロジーの構造の解明及び GG 予想の解決である。

## 3. 研究の方法

パーシステント加群はフレアーホモロジーの族であるため、直接は扱いにくいという難点がある。そこで、パーシステント加群に付随するバーコードに着目する。バーコードは、区間の集合であるため扱いやすく、元のパーシステント加群の情報を保持しているという利点がある。そこで、パーシステント加群に付随するバーコードに着目する。バーコードは、区間の集合であるため扱いやすく、元のパーシステント加群の情報を保持しているという利点がある。

従来の GG 予想の証明では、与えられたハミルトニアン  $H$  に対するフレアーホモロジー  $HF(H)$  と、 $k$  倍のハミルトニアン  $kH$  に対するフレアーホモロジー  $HF(kH)$  を比較していた。上述の通り、これらは扱いにくい対象である。そこで今後の研究では、これらのパーシステント加群のバーコード  $B(H), B(kH)$  を比較する。バーコードは、作用汎関数の値の多重集合である。一方、これまでの申請者の研究 [Or20] で、「周期1の軌道全体の基本群」と、「周期  $k$  の軌道全体の基本群」の関係は記述できている。従って、元の多様体の基本群の仮定を適宜精査することにより、2つのバーコードが比較

をした。

#### 4 . 研究成果

R 群と, type N の torsion-free な群が同値な概念であることを示した。type N の torsion-free な群は主要群であるため, Bredon コホモロジーを援用できるなどの道筋ができた。また, それらを用いて GG 予想を一部拡張できた。また, 4 次元シンプレクティック多様体のシンプレクティック形式と第一 Chern 類の関係を調べ, 与えられたハミルトニアン  $H$  に対するパーシステント加群のバーコード  $B(H)$ ,  $B(kH)$  を比較した。実際, 主要群であればコモホロジーの振る舞いが良く, あるスペクトル系列が利用できることが判った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kawasaki Morimichi、Orita Ryuma	4. 巻 -
2. 論文標題 Existence of pseudoheavy fibers of moment maps	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 2050047 ~ 2050047
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219199720500479	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Ryuma Orita
2. 発表標題 Pseudoheavy subsets in symplectic manifolds
3. 学会等名 12th International Symposium on Natural Sciences（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

個人のページ <a href="https://ryuma-orita.netlify.app/ja/">https://ryuma-orita.netlify.app/ja/</a>
---

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------