

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：11301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2023

課題番号：20K22304

研究課題名(和文) Teichmüller理論の組み合わせ論的諸相

研究課題名(英文) Combinatorial aspects of the Teichmüller theory

研究代表者

石橋 典 (Tsukasa, Ishibashi)

東北大学・理学研究科・助教

研究者番号：30881718

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究ではTeichmüller理論およびその高階化に関する幾何学をクラスター代数を用いて組み合わせ論的な観点から明らかにすることを目標とした。

具体的目標の(A)高階ラミネーションの幾何学的な構成、に関しては階数2のLie代数である $sl(3)$ 、 $sp(4)$ の場合に概ね達成でき、半単純Lie代数への一般化を見据えた多くの観察を得た。

(B)擬Anosov写像類の高次Teichmüller空間上の作用に関する力学系的特徴量の決定、に関してはその理論的準備段階としてクラスター多様体への符号安定な変異ループの代数的エントロピーを研究し、非輪状盤の場合に完全に決定することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の大きな学術的意義は曲面のトポロジー、表現論、量子トポロジーといった分野にわたる知見をクラスター代数という組み合わせ論的枠組みの中で結びつけ、高階Teichmüller空間という数学/物理の両面から興味深い対象の無限遠での挙動について幾何学的な理解を提供したことにある。すなわち、曲面上のある種の幾何構造の「退化」先の幾何学的記述である。またこの成果は、クラスター多様体の双対性の理解に向けた幾何学的基礎をなす。リーマン面のモジュライ空間の位相的構造を司る写像類群のさらなる構造解明に向けた理論的枠組みを整理したことも本研究の意義といえる。

研究成果の概要(英文)：This research project aimed at clarifying the geometry of Teichmüller theory and its higher rank generalizations from the combinatorial viewpoint by means of cluster algebra.

Towards the concrete goal (A): Geometric construction of higher laminations, we almost established the cases of rank 2 Lie algebras $sl(3)$ and $sp(4)$, and obtained several observations towards the general case of semisimple Lie algebras.

Towards the goal (B): Determination of dynamical characteristics of the actions of pseudo-Anosov mapping classes on higher Teichmüller spaces, we investigated the algebraic entropies of the actions of sign-stable mutation loops on the cluster varieties as a theoretical preparation, and completely determined them in the case of acyclic quivers.

研究分野：幾何学

キーワード：クラスター代数 高階Teichmüller理論 スケイン代数 代数的エントロピー

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初 (2020年10月)において、高階ラミネーションの構成は Ian Le (2019) によるアフィン・ビルディング内の凸配置としてしか知られていなかった。この構成は高階 Teichmüller 空間のクラスター構造の直接的な「トロピカル化」として素直なアイデアではあるものの、幾何学的な構成とは言い難く、クラスター多様体の双対写像の構成にもあまり有効ではないと思われた。そのような状況の中、量子双対写像に要求される性質をヒントに加えつつ、Kuperberg のウェブおよびそれらのなす「スケイン代数」の理論を用いて高階ラミネーションを構成しようというのが本研究の当初から通底している発想である。また、当初研究に着手していた擬 Anosov 性のクラスター代数における特徴づけの研究を写像類の高階ラミネーションへの作用に応用することで、擬 Anosov 写像類のさらなる構造解明/分類につながることを応用的目標として掲げた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、Teichmüller 理論およびその高階化に関する幾何学をクラスター代数を用いた組み合わせ論的な観点から明らかにすることである。具体的な目標は次の (A)、(B) である:

- (A) 高階ラミネーションの幾何学的な構成
- (B) 擬 Anosov 写像類の高次 Teichmüller 空間上の作用に関する力学系的特徴量の決定

3. 研究の方法

研究開始当初に想定していた研究方法は以下の通りである:

曲面上の測度付きラミネーションは従来の Teichmüller-Thurston 理論において特に写像類群を研究するための基本的な考察対象である。研究 (A) では高次 Teichmüller 理論における対応物 (=「高階ラミネーション」) をクラスター代数の観点を取り入れつつ幾何学的に導入し、高階の Teichmüller-Thurston 理論を構築する。研究 (B) では申請者が導入した符号安定性の概念を写像類群の高階ラミネーションへの作用に適用し、擬 Anosov 写像類の高階 Teichmüller 空間への作用に関する代数的エントロピーなどの力学系的特徴量を決定することを目指す。

4. 研究成果

成果について詳細に述べるため、まず高階 Teichmüller 理論は位相的な点付き曲面 S および複素半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} のペア (S, \mathfrak{g}) に対して定まっていることに注意しておく。従来の Teichmüller 理論は Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2)$ の場合に相当する。またそれぞれが異なるクラスター構造を持った A , X と呼ばれる 2 つの変種を持つ。これらは曲面 S の特殊点まわりの 2 種の境界条件に対応しており、(量子) 双対写像とはこれら 2 種の幾何の間のある種の双対性 (duality) を記述するものである。

研究 (A) に関しては、階数 2 の Lie 代数 $\mathfrak{sl}(3)$, $\mathfrak{sp}(4)$ に関しては概ね実行することができた。 $\mathfrak{sl}(3)$ の場合はまず湯浅亘氏との共著論文 (Math. Z. 2023) において Muller スケイン代数の $\mathfrak{sl}(3)$ 版を導入し、高階 Teichmüller 理論に付随する量子クラスター代数との比較を行った。この時得られた成果はスケイン代数から量子クラスター代数への片方の包含 (スケイン代数の「クラスター実現」) のみであったが、続く大矢浩徳氏、Linhui Shen 氏との共著論文 (Adv. Math. 2023) における成果を合わせることで古典極限 $q=1$ における一致が示された。点付き曲面が簡単な場合を除き、量子版での両者の一致は予想に留まっている。狩野隼輔氏との共著論文 (arXiv:2204.08947; Alg. Geom. Top. に掲載予定) においては $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(3)$ の場合の高階 X -ラミネーションの Kuperberg web による幾何学的構成を達成し、上記のスケイン理論とクラスター理論の関係に基づいて量子双対 X -写像の構成の一例を与えた。この成果は 2020 年 11 月の Douglas-Sun, 2020 年 12 月の Kim による高階 A -ラミネーションの構成および量子双対 A -写像のプレプリントに引き続くものである。

ここで理論の $\mathfrak{sl}(2)$ から $\mathfrak{sl}(3)$ への進歩はいくぶん飛躍的なものであることを強調しておきたい。階数 1 の Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2)$ の理論はトポロジー方向の議論 (曲面の双曲幾何) でほぼ尽くしていたことに対し、 $\mathfrak{sl}(3)$ 以上の理論において Lie 代数 (表現論) 方向の寄与をどのように理論に取り込むべきかは極めて非自明であった。上述の先行研究および本研究成果はクラスター代数の知識を効果的に活用することで適切な高階化を看破したものである。

続いて $g=\mathfrak{sp}(4)$ の場合、湯浅巨氏との共著論文 (arXiv:2207.01540) では $\mathfrak{sl}(3)$ の場合と同様に Muller スケイン代数の $\mathfrak{sp}(4)$ 版を導入し、片方の包含および古典極限における一致を明らかにした。これに基づいた高階 A-ラミネーションおよび量子双対 A-写像の構成は現在湯浅巨, Zhe Sun 両氏と協力しつつ進行中である。今日では $g=\mathfrak{sl}(n)$ に対するスケイン代数の研究が国内外で活発になってきているが、non-simply-laced な Lie 代数 $\mathfrak{sp}(4)$ に関する理論はクラスター構造の非対称性による組み合わせ論的複雑さや minuscule でない既約表現の出現による表現論的な困難といった $\mathfrak{sl}(n)$ 系列にはない要素を制御する必要があり、独創的な研究であると考えている。

これまでの成果では主に A 側と X 側が個別に研究されていたが、単著論文 (arXiv:2212.14780) および軽尾浩晃氏との共著論文 (arXiv:2305.19074) においては $g=\mathfrak{sl}(2)$ の場合に A 側と X 側の量子双対写像の関係性を調べ、さらに量子クラスター-Poisson 代数とある種の状態付きスケイン代数との同型を示した。これは Muller による先行研究の”双対版”にあたり、量子クラスター-Poisson 代数の「スケイン実現」を初めて達成したものである。

上述の一連の研究成果を得る過程において、特に大矢浩徳氏, Linhui Shen 氏との共著論文 (Adv. Math. 2023) においては一般の半単純 Lie 代数の場合にも通用する観察が多く得られた。これらを具体化し、全ての半単純 Lie 代数について高階ラミネーションおよび量子双対写像の構成を与えることは今後の課題として残った。

研究 (B) に関しては、まずクラスター多様体への変異ループの作用についてその力学系的特徴量を抽出する一般論を構築し、それを擬 Anosov 写像類から定まる変異ループの高階 Teichmüller 空間への作用について適用するという方針であった。狩野隼輔氏との共著論文 (arXiv:2403.01396) においては変異ループの作用についてクラスター多様体の定義データが非輪状態と与えられる (ある程度広く、かつ振る舞いの良い) クラスに限定して解析を行った。この場合には基礎理論となる同氏との共著論文 (Geom. Dedicata 2021) において設けていた技術的な仮定が全て満たされることが証明でき、クラスター-Donaldson-Thomas 変換と呼ばれる代表的な変異ループの代数的エントロピーという力学系の特徴量を完全に決定することができた。この場合には代数的エントロピーは古くから研究されてきた Coxeter 変換のスペクトル半径で表され、クラスター-DT 変換の符号安定性およびその代数的エントロピーを用いて非輪状態の 3 分類 (representation-finite, tame, wild) を特徴づけることができた。この成果は擬 Anosov 性 (あるいは写像類の 3 分類) と非輪状態の分類を符号安定性に基づいて非自明に結びつけるものであり、トポロジーと表現論の間の新たな関係性として興味深いと思われる。

実際に擬 Anosov 写像類から定まる変異ループの高階 Teichmüller 空間への作用について研究する際にもこの成果はモデルケースとなると期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Ishibashi Tsukasa, Yuasa Wataru	4. 巻 303
2. 論文標題 Skein and cluster algebras of unpunctured surfaces for $sl(3)$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 0--0
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-023-03208-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Rei inoue, Tsukasa Ishibashi and Hironori Oya	4. 巻 27
2. 論文標題 Cluster realizations of Weyl groups and higher Teichmüller theory	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00029-021-00630-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Ishibashi Tsukasa, Kano Shunsuke	4. 巻 -
2. 論文標題 Algebraic entropy of sign-stable mutation loops	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-021-00606-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Ishibashi Tsukasa, Oya Hironori, Shen Linhui	4. 巻 431
2. 論文標題 <math xmlns:mml="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" altimg="si1.svg">$A$$U$ for cluster algebras from moduli spaces of G-local systems</math>	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 109256 ~ 109256
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2023.109256	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Ishibashi Tsukasa, Oya Hironori	4. 巻 305
2. 論文標題 Wilson lines and their Laurent positivity	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-023-03355-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Asaka Takeru, Ishibashi Tsukasa, Kano Shunsuke	4. 巻 2024
2. 論文標題 Earthquake Theorem for Cluster Algebras of Finite Type	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 7129 ~ 7159
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnae027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計13件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Tsukasa Ishibashi
2. 発表標題 Wilson lines and the $A=U$ problem for the moduli spaces of G -local systems
3. 学会等名 YMSC Topology Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tsukasa Ishibashi
2. 発表標題 Unbounded $sl(3)$ -laminations and their shear coordinates
3. 学会等名 南大阪代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 石橋典
2. 発表標題 Wilson lines and the A=U problem for the moduli spaces of G-local systems
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tsukasa Ishibashi
2. 発表標題 Wilson lines and the A=U problem for the moduli spaces of G-local systems
3. 学会等名 Trends in Cluster Algebras 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 石橋典
2. 発表標題 クラスター代数と曲面のトポロジー
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会、企画特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tsukasa Ishibashi
2. 発表標題 Sign stability of mapping classes on marked surfaces
3. 学会等名 Geometry of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tsukasa Ishibashi
2. 発表標題 Wilson lines and their Laurent positivity
3. 学会等名 Lie Theory and its Applications in Physics XIV (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tsukasa Ishibashi
2. 発表標題 Wilson lines and their Laurent positivity
3. 学会等名 ALTReT 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tsukasa Ishibashi
2. 発表標題 Wilson lines and their Laurent positivity
3. 学会等名 Topological Studies around Riemann Surfaces (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tsukasa Ishibashi
2. 発表標題 Wilson lines and their Laurent positivity
3. 学会等名 Infinite Analysis 21 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ishibashi Tsukasa
2. 発表標題 Wilson lines and their Laurent positivity
3. 学会等名 Quantum Geometry and Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ishibashi Tsukasa
2. 発表標題 Skein and cluster algebras of marked surfaces without punctures for $sl(3)$
3. 学会等名 Kyoto Differential Topology Seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ishibashi Tsukasa
2. 発表標題 Wilson lines and their Laurent positivity
3. 学会等名 Lie Theory and its Applications in Physics XIV (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Vladimir Dobrev (Editor)	4. 発行年 2023年
2. 出版社 Springer Singapore	5. 総ページ数 542
3. 書名 Lie Theory and Its Applications in Physics	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Michigan State University			
中国	中国科学技術大学			