

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：16301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2023

課題番号：20K22308

研究課題名（和文）圧縮性流体方程式におけるパターンダイナミクスの数理構造の解明

研究課題名（英文）Analysis of mathematical structure of pattern dynamics for compressible fluid

研究代表者

寺本 有花（Teramoto, Yuka）

愛媛大学・理工学研究科（理学系）・助教

研究者番号：60883262

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,600,000円

研究成果の概要（和文）：異方的性質を示す圧縮性流体，liquid crystalについての研究を行った．Ericksen-Leslie systemは流体の方程式に加えて，流速と棒状分子の配向方向との非線形相互作用の影響を考慮した方程式系である．本研究では非等温状態で，ある種の簡易化を施されたEricksen-Leslie systemの無限層状領域上での解の存在と減衰評価及び，漸近挙動を導出した．静止定常解周りの摂動が時間無限大で減衰していく際に，主要部として低周波部分が現れ，その減衰のオーダーは2次元熱核と同等のものであるということが分かった．

研究成果の学術的意義や社会的意義

Ericksen-Leslie systemは液晶の流れを記述する方程式であり，流体の運動や，細長い棒状分子の向きや曲げ伸ばしの影響も考慮されている．そのため豊富な非線形相互作用を観察することができ，学術的価値がある．液晶は温度によってその様相を変化させるが，非等温下での解析を行った結果は少ない．温度を変数として加えた方程式の解析は物理学，工学にも寄与するものと考えられる．

研究成果の概要（英文）：I studied about liquid crystals which have the property of being anisotropic. Ericksen-Leslie system couples the Navier-Stokes equations governing the fluid velocity with direction equation governing the motion of orientation of rod-like particles. I proved the existence of global strong solutions, its decay rates and the asymptotic behavior for non-isothermal simplified Ericksen-Leslie system in infinite layer. It turns out that the low-frequency part of the solution decays like a 2-dimensional heat kernel. We can also see that the low-frequency part appears in the asymptotic reading part of the solution which is affected by nonlinear terms as time goes to infinity.

研究分野：数学

キーワード：圧縮性Navier-Stokes方程式 液晶 漸近挙動

### 1. 研究開始当初の背景

圧縮性 Navier-Stokes 方程式は、準線形双曲-放物型方程式に分類され、双曲型の側面により現れる波の伝播と、放物型の側面により現れる粘性拡散との相互作用によって、興味深い解の挙動が見られる。反応拡散方程式をはじめとする放物型方程式系に対しては、活発な研究が行われ、中心多様体理論や解析的半群理論などに基づいた有効な数学理論が整備されている。半線形放物型方程式である非圧縮 Navier-Stokes 方程式に関しても、反応拡散系における数学理論がある程度適用できることが分かっており、例えば熱対流問題における時空周期パターンや回転流体系に見られる渦パターンなどの解析が行われている。

一方で圧縮性 Navier-Stokes 方程式は、散逸構造を持っているが、準線形双曲-放物型方程式に分類される方程式である。静止状態の周りの解の挙動に対しては、線形化作用素が解析的半群になるといった放物型方程式に近い性質により、詳細な解析が可能である。ところが、時空非一様な流れが現れる場合には、方程式の持つ双曲型の影響が強くなり、放物型方程式系において有効であった理論が適用できない。こうした背景のもと、双曲-放物型方程式系に対する解析手法の開発と、その数理構造の解明が望まれている。

### 2. 研究の目的

本研究の主目的は、流体力学の基礎方程式である圧縮性 Navier-Stokes 方程式を始めとする準線形双曲-放物型方程式系におけるパターンダイナミクスの数理構造の解明とその解析手法の確立であった。

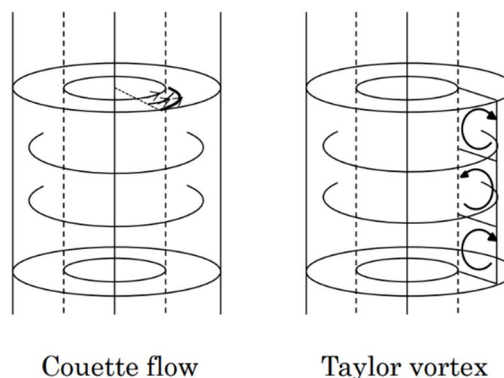
圧縮性 Navier-Stokes 方程式に含まれるマッハ数と呼ばれるパラメータをゼロとすると、その極限として非圧縮 Navier-Stokes 方程式が得られることから、マッハ数が小さい場合は圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解のダイナミクスは非圧縮 Navier-Stokes 方程式の解のダイナミクスに近いのではないかと期待される。しかし、それを数学的に証明することは難しい問題である。非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対するパターンダイナミクスの解析においては、線形化作用素のスペクトル解析が一つの鍵となるが、マッハ数をゼロとする極限は特異極限であるため、たとえマッハ数が十分小さい場合でもスペクトルが似通った性質を持つとは簡単には結論できない。実際、圧縮性 Navier-Stokes 方程式においては、虚軸近傍に非圧縮のものとは異なるスペクトルが現れ、これはマッハ数が十分小さい場合にも消えずに残り続ける。これにより、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の場合よりも解のダイナミクスはさらに多様で豊富なものになると予想され、その解明は非常に興味深い。

パターン形成の現象として古くから研究が行われている例としてテイラー問題が挙げられる。パラメータを変化させると回転によって引き起こされる回転層流 (Couette 流) が不安定となり、円筒の軸方向に周期的に並んだ渦パターン (Taylor 渦) が現れる。熱対流問題においても同様にある種のパラメータの変化に伴い、静止状態から時空周期構造を持った対流パターンが形成される。このような現象は、乱流への遷移やパターン形成の典型例として興味を持たれ、その数学解析は非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いて行われてきた。解析的半群理論や中心多様体理論等を駆使して、分岐時空周期パターンのまわりの解のダイナミクスの数理構造が詳細に調べられ、数学理論が構築されている ([S, D-S-S])。

圧縮性 Navier-Stokes 方程式の場合は、熱対流周期パターンの分岐や平行流からの時空周期進行波解の分岐が知られているが ([N-P-T, K-N])、それらは線形化作用素のスペクトルに対するある種の仮定の下での結果であり、分岐周期パターンのまわりのダイナミクスの詳細は全く分かっていない。

### 3. 研究の方法

半線形双曲-放物型方程式系である人工圧縮方程式系に対して行った解析を、準線形双曲-放物型方程式系である圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対して拡張し、圧縮性 Taylor 渦まわりの解



Couette flow

Taylor vortex

のダイナミクスの詳細を明らかにする。非圧縮性 Taylor 渦の場合は、次のことが知られている。円柱の軸方向を  $x$  軸にとったとき、 $x=+$ 、 $-$  で異なる周期を持つ 2 つの周期パターンをつなぐ解が存在し、そのつなぎ目は欠陥と呼ばれる界面を形成し、欠陥のダイナミクスは粘性 Burgers 方程式で記述される。このことをマッハ数が小さい場合にまず人工圧縮方程式系に対する解析を試み、それに基づいて圧縮性 Navier-Stokes 方程式へと拡張を図る。

#### 4. 研究成果

連結型進行波解の解析の前段階として、3次元無限層状領域における簡易化された Ericksen-Leslie モデルの解の漸近挙動について考察を行った。Ericksen-Leslie モデルは nematic 液晶の流れを記述する方程式であり、流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式と、棒状分子の向いている方向を表す方程式を組み合わせた形をしている。流れに加えて、細長い棒状分子の向きや曲げ伸ばしの影響も考慮されているため、豊富な非線形相互作用を観察することができる。非圧縮かつ等温状態での nematic 液晶の解の挙動についてはこれまでに数多くの研究がなされてきた ([L], [L-L])。液晶は温度によってその様相を変化させるが、非等温下での解析を行った結果は少ない。本研究では、温度を変数として加え、非等温状態での解析を行った。まず、十分小さな初期値に対する時間大域解の存在を証明した。次に、静止定常解まわりの摂動についての考察を行った。静止定常解まわりの線形化作用素のスペクトル解析を行った結果、低周波部分は原点近傍の (半)単純固有値に対する固有ベクトルによって構成されることが分かった。また低周波部分は 2 次元熱方程式の解と同様のオーダーで時間減衰し、時間無限大で漸近的主要部として現れることを示した。

例えば、水平方向を  $x$  軸に取ったとき、 $x=+$  と  $-$  で分子の向きが異なっているというような境界条件を想定すると、2 種類の分子配向をつなぐ解が存在すると考えられ、その解の漸近挙動を調べることで、連結型進行波解の解析の足掛かりになると期待できる。

#### <引用文献>

[S] G. Schneider, Nonlinear stability of Taylor vortices in infinite cylinders. Arch. Rational Mech. Anal. 144 (1998), 121--200.

[D-S-S-S] A. Doelman, B. Sandstede, A. Scheel, G. Schneider, The dynamics of modulated wave trains. Mem. Amer. Math. Soc. 199 (2009), no. 934.

[N-P-T] T. Nishida, M. Padula and Y. Teramoto, Heat convection of compressible viscous fluids. II, J. Math. Fluid Mech., 15 (2013), 689--700.

[K-N] Y. Kagei and T. Nishida, Traveling waves bifurcating from plane Poiseuille flow of the compressible Navier-Stokes equation, Arch. Rational Mech. Anal., 231 (2019), 1--44.

[L] F. H. Lin, Nonlinear theory of defects in nematic liquid crystals: Phase transition and flow phenomena, Comm. Pure Appl. Mathe., 42 (1989), 789--814.

[L-L] F. H. Lin and C. Liu, Nonparabolic dissipative systems modeling the flow of liquid crystals, Comm. Pure Appl. Math., 48 (1995), 501--537.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Yuka Teramoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Asymptotic behavior of non-isothermal compressible nematic liquid crystal flows in infinite layer	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Yuka Teramoto
2. 発表標題 Global well-posedness for compressible non-isothermal nematic liquid crystal model in infinite layer
3. 学会等名 若手による流体力学の基礎方程式研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuka Teramoto
2. 発表標題 Asymptotic behavior of compressible non-isothermal nematic liquid crystal flow in infinite layer
3. 学会等名 RIMS共同研究「非圧縮性粘性流体の数理解析」（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuka Teramoto
2. 発表標題 Asymptotic behavior of compressible non-isothermal nematic liquid crystal flow in infinite layer
3. 学会等名 19th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications（国際学会）
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------