

令和 5 年 6 月 2 日現在

機関番号：24405

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2022

課題番号：20K22309

研究課題名（和文）カツ・ムーディ群と可積分系の無限次元幾何学

研究課題名（英文）Infinite dimensional geometry of Kac-Moody groups and integrable systems

研究代表者

森本 真弘（Morimoto, Masahiro）

大阪公立大学・大学院理学研究科・特任助教

研究者番号：60880747

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：無限次元部分多様体幾何学とカツ・ムーディ幾何学との関係を更に深める以下の結果を得た：アフィン・カツ・ムーディ対称空間のイソトロピー表現に相当するpath群作用の軌道の主曲率明示公式を与えた．path空間の同型写像を新たに導入し，固有フレドホルム部分多様体の主曲率計算に関する既存の全ての結果を統合した．この同型写像がアフィン・カツ・ムーディ対称空間の群型の同型写像と対応することを示した．これらの応用として，無限次元オースティア部分多様体の例を多数構成した．

研究成果の学術的意義や社会的意義

カツ・ムーディ代数は，無限の対称性を記述する言語として，数学や物理の様々な分野で現れる．しかし，無限である故にその取り扱いが難しく，特にカツ・ムーディ群は，これまで避けられることが多かった．本研究では，無限次元部分多様体幾何学とカツ・ムーディ幾何学の観点から，カツ・ムーディ代数・群や関連分野に対する理解を深めることができた．これは数学や物理の基礎研究において，1つの基盤となる意義のある成果であると考えている．

研究成果の概要（英文）：We obtained the following results which deepen the relation between infinite dimensional submanifold geometry and Kac-Moody geometry: We gave an explicit formula for orbits of path group actions given as isotropy representations of affine Kac-Moody symmetric spaces. We newly defined a certain isomorphism of path spaces and unified all known computational results of principal curvatures of proper Fredholm submanifolds. We showed that the isomorphism corresponds to an isomorphism of affine Kac-Moody symmetric spaces of group type. As an application of these we constructed many examples of infinite dimensional austere submanifolds.

研究分野：微分幾何学

キーワード：カツ・ムーディ幾何学 無限次元部分多様体

1. 研究開始当初の背景

カツ・ムーディ代数とは、一般カルタン行列から生成元と関係式により定義される一般に無限次元のリー代数である。特にアフィン・カツ・ムーディ代数と呼ばれるクラスが数学や物理の様々な分野において現れ、近年、様々な方面から関心が持たれている。アフィン・カツ・ムーディ代数は、捩れループ代数の2次元拡大として実現される。これに倣い、アフィン・カツ・ムーディ群と呼ばれる無限次元群が、捩れループ群上のトラス束として定義される。しかしその取り扱いが難しく、これまで避けられることが多かった。

1980年代に柏原正樹氏、神保道夫氏、伊達悦朗氏、三輪哲二氏らは、ソリトン方程式の解の変換群のリー代数としてアフィン・カツ・ムーディ代数が現れることを示した。また、2000年代に C.-L. Terng, K. Uhlenbeck らは、可積分系方程式をループ群作用により定式化する手法を確立した。これら2つの研究はいずれも可積分系理論(ソリトン理論)における重要な研究として位置付けられているが、まだ完全には理解されていない点もある。特にこれらの理論の相互関係や統一的な扱いについては、まだ研究がなされていない。その一因として、上で述べたアフィン・カツ・ムーディ群の取り扱いの難しさが起因すると考えられる。アフィン・カツ・ムーディ代数・群について、多角的な視点から研究がなされる必要があると考えられる。

近年、アフィン・カツ・ムーディ群が関係する興味深い研究がある。1980年代、R. S. Palais と C.-L. Terng は無限次元部分多様体の研究を開始した。1990年代となり、G. Thorbergsson や E. Heintze らとの研究を経て、アフィン・カツ・ムーディ対称空間と呼ばれる無限次元対称空間が定義された。その対称空間の群型は、アフィン・カツ・ムーディ群に他ならない。そして、アフィン・カツ・ムーディ対称空間が、そのイソトロピー表現を通して、無限次元部分多様体と密接に関わることが明らかとなった。これを契機に、アフィン・カツ・ムーディ群や、より一般にアフィン・カツ・ムーディ対称空間の多様体構造や幾何学的性質が研究されており、これらは「カツ・ムーディ幾何学」と呼ばれている。これらは通常、純粋数学的な観点から研究が行われており、その知見を他分野に応用するという研究は、これまでなされていない。

2. 研究の目的

申請時当初の研究目的は、無限次元部分多様体論そしてカツ・ムーディ幾何学の研究を更に推し進め、その知見をもとに既存のソリトン理論を統一理解すること、であった。

しかしながら、研究開始直後から終了まで COVID-19 感染拡大の影響を大きく受け、海外渡航が困難な状況が長く続き、またオンライン関係をはじめとする他業務が大幅に増加した。この状況を鑑み、確実に成果を挙げるため、当初の目的前半の「無限次元部分多様体論およびカツ・ムーディ幾何学の研究を更に推し進めること」に優先的に取り組むこととした。

3. 研究の方法

無限次元部分多様体論とカツ・ムーディ幾何学とは、イソトロピー表現を通して密接に関係している。特に、アフィン・カツ・ムーディ対称空間のイソトロピー表現の各軌道が、無限次元部分多様体の基本クラスである「固有フレドホルム部分多様体」となり、様々な種類の無限次元部分多様体の例を提供する。本研究では、このイソトロピー表現の軌道の幾何学を中心に研究を行った。

アフィン・カツ・ムーディ対称空間のイソトロピー表現は、一般に、Hermann 作用と呼ばれる有限次元対称空間への等長作用から誘導される無限次元 path 群作用と本質的に同値となる (Heintze-Palais-Terng-Thorbergsson 1995)。特に、アフィン・カツ・ムーディ対称空間の群型(つまりアフィン・カツ・ムーディ群)の場合は、シグマ作用という有限次元リー群への等長作用から誘導される無限次元 path 群による作用と本質的に同値となる (Terng 1995)。まずは一般に Hermann 作用の場合で研究を行い、次にシグマ作用の場合へ定式化するという方法をとった。

4. 研究成果

まずは、一般に Hermann 作用の場合で、誘導される path 群作用の軌道の幾何学を研究した。ここで述べる成果は論文[M. Morimoto, Curvatures and austere property of orbits of path group actions induced by Hermann actions, Transform. Groups (2022)]として掲載されている。まずは、Hermann 作用から誘導される path 群作用の軌道の主曲率明示公式を与えた。本主曲率公式は、C.-L. Terng, U. Pinkall, G. Thøergergsson らの先行研究で得られた結果を一般化するものである。更に、本結果の応用として、軌道がオースティア部分多様体となるための条件を示した。ここで部分多様体がオースティアであるとは、各法方向の主曲率全体の成す集合が (-1) 倍不変となることを指す。定義からオースティア部分多様体は極小部分多様体となる。本結果を、Hermann 作用のオースティア軌道の例に適用することで、無限次元オースティア部分多様体の例を多数構成した。

次に、シグマ作用の場合で、誘導される path 群作用の研究を行った。ここで述べる成果は、プレプリント[M. Morimoto, Path group actions induced by sigma-actions and affine Kac-Moody symmetric spaces of group type, arXiv:2201.01662]として一般公開しており、現在査読中である。本研究において注意しなければならないのは、シグマ作用は Hermann 作用の特殊な場合であるものの、前研究の結果を直接適用することはできないことである。なぜなら、Hermann 作用とシグマ作用とで path 群作用の誘導のされ方が異なるからである。この問題を解決するために、私は path 空間と path 群とのそれぞれの上に特殊な(自然な)同型写像を定義し、その同型写像を通して、シグマ作用から誘導される path 群作用が、Hermann 作用から誘導される path 群作用の特殊な場合と見做せることを示した。この結果に基づき、固有フレドホルム部分多様体の主曲率計算について、上述の C.-L. Terng, U. Pinkall, G. Thøergergsson の結果を含む、既存の全ての結果を統一理解することに成功した。更に、この結果の応用として、path 群作用の軌道がオースティア部分多様体や弱鏡映部分多様体となるための条件を与えた。その結果をシグマ作用のオースティア軌道、弱鏡映軌道の例に適用することで、無限次元のオースティア部分多様体・弱鏡映部分多様体の例を構成した。更に、上で導入した path 空間・path 群の上の同型写像と、アフィン・カツツ・ムーディ対称空間との関係についても研究を行い、報告者が導入した同型写像が、アフィン・カツツ・ムーディ対称空間の群型、つまりアフィン・カツツ・ムーディ群における、ある種の自然な同型写像と対応していることを示した。

更に、上記研究と関連した新たな研究も行い、一定の成果が得られた。ここで述べる結果は、現在論文としてまとめ執筆中である。Hermann 作用やシグマ作用の一般化として「超極作用」と呼ばれる等長作用が定義されるが、それに例外軌道(主軌道でないが最大次元である軌道)が存在するかどうか、という問題は重要である。有限次元の場合、単連結完備リーマン多様体への極作用に例外軌道が存在しないことが知られている。私はこの結果の拡張として、無限次元ヒルベルト空間への極作用においても、例外軌道が存在しないことを示した。この証明では、ヒルベルト空間の等径部分多様体の理論(Terng 1989, Heintze-Liu-Olmos 2006)を本質的に用いる。更に、その結果の応用として、単連結な有限次元コンパクト対称空間の超極作用に例外軌道が存在しないことの別証明を与えた。本研究は、無限次元を経由した有限次元等長作用の新たな研究手法を提供する可能性を秘めており、現在、研究を更に継続・発展させている。

研究全体を通して、オースティア部分多様体をはじめとする、対称性をもつ極小部分多様体が、無限次元 path 空間(ヒルベルト空間)内において非常に多く存在することが明らかとなった。この事実は、これまでの先行研究では明らかでなかった事実であり、査読者からも高く評価された点であり、国内外の関連研究において一つのインパクトを与えたと考えている。また、研究の過程で導入した path 空間の同型写像が、アフィン・カツツ・ムーディ群のある種の同型写像と対応することも明らかとなった。この結果は、アフィン・カツツ・ムーディ対称空間の理論の正当性を補完するものであり、同時に、無限次元部分多様体論との関係を深化させるものであると位置づけられる。これらの研究に示唆を受けて開始した極作用の構造(例外軌道の非存在)に関する研究は、有限次元等長作用の幾何学の新たな研究手法を生み出す可能性を秘めており、更なる発展が期待できる。

アフィン・カツツ・ムーディ代数・群は、可積分系理論をはじめ様々な分野において出現するが、その取扱いが難しく、これまで避けられたこともあった。この状況を改善するためには、アフィン・カツツ・ムーディ代数・群について、様々な観点から深い研究が行われる必要がある。本研究では、無限次元部分多様体論およびカツツ・ムーディ幾何学の視点からアフィン・カツツ・ムーディ代数・群に関連する研究を行い、一定の成果が得られた。研究期間中は多数の講演依頼を受け、特に 2022 年 7 月には可積分系理論の専門家から招待され講演を行った。また、2022 年 11 月には、本科研費を用いて国際研究集会「The 2nd Shot of The 13th MSJ-SI "Differential Geometry and Integrable Systems" The 5th International Workshop: Geometry of Submanifolds and Integrable Systems」を開催した(共催)。本研究で得られた知見は、今後、アフィン・カツツ・ムーディ代数・群が関係する分野を研究する上で、一つの基盤となると考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Morimoto Masahiro	4. 巻 -
2. 論文標題 Curvatures and Austere Property of Orbits of Path Group Actions Induced by Hermann Actions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00031-022-09732-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiro Morimoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Path group actions induced by sigma-actions and affine Kac-Moody symmetric spaces of group type	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 arXiv:2201.01662	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.48550/arXiv.2201.01662	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masahiro Morimoto	4. 巻 23
2. 論文標題 On the converse problem for austere orbits of path group actions induced by Hermann actions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of The 23rd International Differential Geometry Workshop on Submanifolds in Homogeneous Spaces & Related Topics	6. 最初と最後の頁 157--165
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiro Morimoto	4. 巻 Vol. 44, No.2
2. 論文標題 On weakly reflective submanifolds in compact isotropy irreducible Riemannian homogeneous spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 467-476
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179344	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiro Morimoto	4. 巻 -
2. 論文標題 On the geometry of orbits of path group actions induced by Hermann actions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 部分多様体論オンライン2020 講演録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masahiro Morimoto	4. 巻 Vol. 1
2. 論文標題 On minimal PF submanifolds in Hilbert spaces with symmetries	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 OCAMI Reports 2021	6. 最初と最後の頁 40-41
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.24544/ocu.20210605-001	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masahiro Morimoto	4. 巻 Vol. 2
2. 論文標題 Minimal PF submanifolds in Hilbert spaces with symmetries	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 OCAMI Reports 2021	6. 最初と最後の頁 78-100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.24544/ocu.20210605-002	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masahiro Morimoto	4. 巻 Vol. 6
2. 論文標題 Curvatures and Austere Property of Orbits of Path Group Actions Induced by Hermann Actions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 OCAMI Reports 2022	6. 最初と最後の頁 128-147
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.24544/ocu.20220810-002	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 14件 / うち国際学会 8件）

1. 発表者名 森本真弘
2. 発表標題 ヒルベルト空間内の対称性をもつ極小固有フレドホルム部分多様体
3. 学会等名 大阪公立大学 談話会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森本真弘
2. 発表標題 Geometry of orbits of path group actions induced by Hermann actions
3. 学会等名 立命館大学幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiro Morimoto
2. 発表標題 Geometry of orbits of path group actions induced by Hermann actions
3. 学会等名 第14回GEOSOCKセミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森本真弘
2. 発表標題 Hermann 作用から誘導されるpath群作用の軌道の幾何学
3. 学会等名 第69回幾何学シンポジウム，パラレルセッション（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森本真弘
2. 発表標題 Hermann 作用から誘導されるpath群作用の軌道の幾何学
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会，一般講演
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiro Morimoto
2. 発表標題 Geometry of orbits of path group actions induced by Hermann actions
3. 学会等名 Correspondences of various geometries (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiro Morimoto
2. 発表標題 Minimal PF submanifolds in Hilbert spaces with symmetries
3. 学会等名 The 3rd Shot of The 13th MSJ-SI ``Differential Geometry and Integrable Systems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masahiro Morimoto
2. 発表標題 Curvatures and austere property of orbits of path group actions induced by Hermann actions
3. 学会等名 Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems, July 2, 2021. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masahiro Morimoto
2. 発表標題 Curvatures and austere property of orbits of path group actions induced by Hermann actions
3. 学会等名 The 3rd Japan-Taiwan Joint Conference on Differential Geometry, November 2, 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masahiro Morimoto
2. 発表標題 Curvatures and austere property of orbits of path group actions induced by Hermann actions
3. 学会等名 Geometry of symmetric spaces and group actions, February 19, 2022. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森本 真弘
2. 発表標題 Hermann作用から誘導されるpath群作用の軌道の幾何学
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2021, 2022年3月20日 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森本 真弘
2. 発表標題 ヒルベルト空間内の対称性をもつ極小固有フレドホルム部分多様体
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森本 真弘
2. 発表標題 Hermann作用から誘導されるpath群作用の軌道の幾何学
3. 学会等名 部分多様体オンライン 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masahiro Morimoto
2. 発表標題 Minimal PF submanifolds in Hilbert spaces with symmetries
3. 学会等名 Submanifolds of Symmetric Spaces and their Time Evolutions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森本 真弘
2. 発表標題 コンパクト・イソトロピー既約リーマン等質空間内の弱鏡映部分多様体について
3. 学会等名 日本数学会 2021年度年会, 一般講演
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masahiro Morimoto
2. 発表標題 On minimal PF submanifolds in Hilbert spaces with symmetries
3. 学会等名 The 27th Osaka City University International Academic Symposium, Mathematical Science of Visualization, and Deepening of Symmetry and Moduli (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

森本 真弘 https://sites.google.com/view/mmorimoto Webpage of M. Morimoto https://sites.google.com/view/mmorimoto-e

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 5th International Workshop ``Geometry of Submanifolds and Integrable Systems"	開催年 2022年～2022年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------