様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2020～2021
課題番号：２０Ｋ２２３１１

研究課題名（和文）接触角を生成する非圧縮性粘性流体の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical Analysis of the incompressible viscous fluid with the moving contact line

研究代表者
渡邉　圭市（Watanabe, Keiichi）

早稲田大学・理工学術院・講師（任期付）

研究者番号：３０８７５３６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：接触角を90度に固定し，接触角を生成するナビエ・ストークス方程式の自由境界問題を考察した．ただし，流体の占める領域は，3次元有界領域であるとし，領域の境界には自由境界条件及び滑り境界条件を課した．本研究では，与えられた時刻に対して，方程式系の時間局所適切性を時間 Lp 空間 Lq 枠で明らかにした．
関連する研究として，流体の占める領域が境界の滑らかな有界領域である場合のナビエ・ストークス方程式の自由境界問題について扱った．軸対称な定常解の安定性は，定常状態における自由境界を決定するオイラー・ラグランジュ方程式に付随するエネルギー汎関数の二次変分の正値性によって特徴づけられることがわかった．

研究成果の学術的意義や社会的意義
接触角を伴う Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の適切性に関する本研究の結果は，Wilke (2013) で考えられていた境界条件の一部を修正し，より一般の関数空間で方程式系の適切性を示したものである．
一方，表面張力を伴う Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の（軸対称な）非自明な定常解の安定性についての特徴づけの結果は，1800年代の Plateau の古典的結果を正当化する大変興味深いものである．

研究成果の概要（英文）：The free boundary problem of the Navier-Stokes equations is considered with the 90 degrees contact angle condition. Here, the fluid occupies a three-dimensional bounded domain, and free boundary conditions and slip boundary conditions are imposed on the boundary of the domain. In this study, for a given time, the local appropriateness of the system is proved with Lp-in-time and Lq-in-space framework.

The stability of the free boundary problem of the Navier-Stokes equations is also studied, where the domain occupied by the fluid is bounded surrounded by a smooth boundary. The stability of the axisymmetric stationary solution is characterized by the positiveness of the second variation of the energy functional associated with the Euler-Lagrangian equation which determines the free boundary in the equilibrium.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ナビエ・ストークス方程式　自由境界問題　最大正則性　関数方程式論　接触角

１．研究開始当初の背景
　水などの非圧縮性粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式の自由境界問題は，Solonnikov (1977) を端緒に，Beale (1983) や Prüss-Simonett (2010)，Shibata-Shimizu (2008) らによって研究されてきた．自由境界問題とは流体の速度場や圧力だけでなく領域の境界も未知となる問題であり，その時間局所解の存在は，固定境界問題の線型化問題に対する最大正則性を証明することが鍵であることが知られている．実際に，自由境界を固定境界に変換した際，境界条件を込めて方程式系が準線型となり，半群の評価のみでの解析は困難であるためである．
　上記の研究はいずれも自由境界が滑らかである場合を考察しており，ある固定された領域内の時間発展する曲面が，領域の境界において接触角を生成する場合のように，自由境界に特異性が生じている場合については扱っていない．接触角を生成する Navier-Stokes 方程式の自由境界問題は，例えば剛体の中に含まれる空洞が水によって部分的に占められている場合の，水の運動を記述する数理モデルである．この数理モデルに対する新たな数学解析手法を確立させることは，主に流体工学から要請されており，多くの工学的応用が見込まれる（cf. Blake (2006)）．この問題では，異なる境界条件をもつ境界が衝突することで接触角を生成するため，接触角付近に特異性が生じる．ただし，接触角を 180 度あるいは 90 度に固定した場合は特異性を回避できることが知られており，それぞれ Solonnikov (1995) や Wilke (2013) によって方程式系の初期値問題の時間局所適切性および小さな初期値に対する時間大域適切性が示されている．しかし，Solonnikov (1995) や Wilke (2013) は領域の一部に Dirichlet 境界条件を課しており，これには物理的整合性があるとは言えなかった．

２．研究の目的
　本研究の目的は，接触角を生成する Navier-Stokes 方程式の自由境界問題を定式化し，その方程式系の適切性を明らかにすることである．特に，接触角における境界条件が方程式系の解にどのような影響を与えるのか，つまり，接触角付近に生じている特異性が流体の速度場にどのような影響を与えるのかを明らかにする．なお，本研究では，Navier-Stokes 自由境界問題の適切性の証明に極めて有効であるとして知られている最大正則性理論に基づく解析を行い，初期値が属する関数空間をなるべく広いものにできるようにする．また，従来の研究 (Solonnikov (1995)，Wilke (2013)) に矛盾しないような研究結果が得られるかどうかを検討するのも本研究の目的である．

３．研究の方法
　本研究の体制は，研究代表者一人によって行われる．また，国際研究集会を開催し，国内外の研究者を招待することにより，世界最先端の知見を得られるようにする．
　接触角を生成する Navier-Stokes 方程式の自由境界問題を定式化に関しては，方程式系のエネルギー汎関数が Lyapunov 汎関数になるよう，接触角を生成する Navier-Stokes 方程式の自由境界問題を定式化する．具体的には， Bothe-Prüss (2016) と同様の手法により，方程式系のエネルギー汎関数が Lyapunov 汎関数となるための十分条件を導出する．定式化した方程式系の適切性を示すためには，まず，半沢変換を用いて時間に依存しない固定領域における方程式系を導く．次に，対応する線形化問題を考え，線形化作用素に対する最大正則性定理を証明する．最後に，Sobolev の埋め込み定理とよく知られた非線型評価を組み合わせることにより，縮小写像の原理によって方程式系の強解 (strong solution) の一意存在を明らかにする．本研究に関連する問題（他の方程式系など）に取り組むことにより，主課題に取り組むための技術的装具を整備する．
　当科研費の使用の観点では，研究計画を遂行する上で重要なことは，国内外の研究者と活発に交流し，本研究に関連する国内外の研究動向を把握すること及び当分野を牽引する研究者と有益な議論を行うことである．これにより，本研究の進展が加速すると考えられる．

４．研究成果
(1) 接触角を生成する粘性流体の挙動を考察する際，よく知られた Dirichlet 境界条件を用いることには物理的整合性がないことが Huh-Scriven (1971) によって指摘されていたので，本研究では，partial slip 境界条件を課して，方程式系の定式化を行なった．結果的には，本研究期間中に Guo と Tice によって発表された，時間発展する接触角を伴う Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の時間大域適切性の学術論文で用いられている Ren-E model を用いることで，方程式系のエネルギー汎関数は Lyapunov 汎関数になることがわかった．しかしながら，この Ren-E model からは，Fricke ら (2019) により指摘されている接触角付近の圧力に関する弱特異性が不明なままであるので，今後さらなる考察が必要であると考えられる．

(2) 上記 (1) で述べたように，物理的に整合性のある定式化にはまだ研究の余地があるため，

本研究ではまず，流体の占める領域は，3次元有界領域であるとし，領域の境界には自由境界条件および滑り境界条件を課した際の方程式系の適切性を考察した．ここで，接触角が 90 度であるという境界条件から，方程式系のエネルギー汎関数は Lyapunov 汎関数となる．また，接触角を 90 度に固定することによって，よく知られた reflection argument を用いることができ，接触線付近の特異性を排除することができることがわかった.接触角を生成する Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の適切性を調べる際，固定境界問題への変換を行うとその方程式系は準線型放物型偏微分方程式系となる．ゆえに，上述の通り，線型化問題に対する最大正則性原理を示すことが重要である．そこで，研究代表者は，付随する線型化問題の最大 Lp-Lq 正則性原理を示した．特に，領域の境界および接触線への境界のトレースが存在するための必要十分条件を明らかにした．さらに線型化問題の最大 Lp-Lq 正則性原理の応用として，与えられた時刻 $T > 0$ に対して，方程式系の時間局所適切性を時間 Lp 空間 Lq 枠で明らかにした．一般に，流体の占める領域が滑らかでない場合，流体の速度場の（空間変数に関する）二階偏微分の可積分性が制限されることが知られているが，円柱のように，領域の側面の外向きの単位法線ベクトルと底面の外向き単位法線ベクトルが直交している場合は，領域の境界が滑らかであるときと同様に，流体の速度場の二階偏微分の可積分性が制限されないこともわかった．なお，本研究の結果は，Wilke (2013) で考えられていた境界条件の一部を修正し，より一般の関数空間で方程式系の適切性を示したものである．

(3) 上記(2)の適切性の結果を，時間大域的な場合に拡張する足がかりとして，流体の占める領域の境界が滑らかである，通常の Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の非自明な定常解の安定性の証明に取り組んだ．実際に，従来の Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の研究（例：柴田 (2018)）では，速度場が時間無限大で零に収束するような場合，つまり自明な定常解の安定性を扱ったものが多いが，定常状態において流体は剛体運動（並進運動や回転運動）することが知られている．非自明な定常解の安定性を扱う上で難しい点は，定常状態において自由境界が球面にならないため，表面張力に起因する Laplace-Beltrami 作用素の固有値を用いた，線型化問題のスペクトル解析が困難になる点にある．そこで，研究代表者は，定常状態における流体の角運動量が小さい場合は，自明な定常解の安定性を扱った柴田 (2018)の結果からの摂動として考えられることを明らかにした．実際に，研究代表者は，非自明な定常解の安定性だけでなく，非自明な定常解の一意存在も明らかにした．これは，回転浮遊液滴の形状を数値解析によって調べた Brown-Scriven (1980)の結果に合致するものである．

(4) 上記 (3) の研究結果では,定常状態における流体の角運動量が小さい場合を扱っていたが，より一般の角運動量を伴う場合の Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の非自明な定常解の安定性の証明に取り組んだ.特に，軸対称な定常解の安定性は，定常状態における自由境界を決定する Euler-Lagrange 方程式に付随するエネルギー汎関数の二次変分の正値性によって特徴づけられることがわかった.このエネルギー汎関数の二次変分の正値性から，表面張力に起因する Laplace-Beltrami 作用素の固有値の情報を引き出すことができ，付随する解析半群が適当な小空間で指数減衰することがわかった．結果として，この解析半群の減衰評価と線型化問題に対する最大正則性定理を組み合わせることで，非線型問題の時間大域解が非自明な定常解に収束することがわかった．つまり，表面張力を伴う Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の（軸対称な）非自明な定常解の安定性についての特徴づけを得ることができた．この研究成果は1800年代の Plateau の古典的結果を正当化する大変興味深いものである．

(5) 関連する研究として，走化性をもつ細胞性粘菌の凝集現象を記述する Keller-Segel 方程式系および非圧縮性粘性流体の挙動を記述する Navier-Stokes 方程式からなる非線型連立偏微分方程式系（Chemotaxis-Navier-Stokes 方程式系）を考察し，その時間局所・大域適切性および解の長時間挙動を解明した．この方程式系は，非圧縮性粘性流体に含まれる好気性バクテリアとその栄養素（つまり酸素）への移動との相互作用を記述する方程式系であり，生物医学への応用の観点から近年注目が集まっている数理モデルである．本研究では，従来の研究ではあまり扱われることの少なかった領域の次元が三次元以上の場合を扱い，エネルギー法を用いる従来の研究手法よりもかなり簡便な方法で時間局所・大域解を構成することに成功した．具体的には，最大正則性理論に基づいた解析を行い，方程式系の時間局所・大域解を構成しただけでなく，解のもつ時空間の変数に関する解析性も明らかにした．

(6) 相転移および表面張力を伴う圧縮性・非圧縮性粘性二相流体の自由境界問題の時間大域適切性を証明した．ここで相転移とは，物質が気体から液体や固体へ，あるいはその逆に状態変化する物理現象を指し，初期時刻における流体の占める領域は有界領域であることを仮定している．圧縮性 Navier-Stokes(-Korteweg) 方程式の自由境界問題を考える上で一般的に難しい点は，圧縮性粘性流体の占める領域の体積が時間によって変化する点であるが，本研究では，固定された有界領域内で圧縮-非圧縮二相流体を考えるため，非圧縮性粘性流体の占める領域の体積が有界かつ定数であることから圧縮性粘性流体の占める領域の体積もある定数であることがわかった．このことと，非圧縮性粘性流体の重心を考慮した半沢変換を導入することで，適当なスペクトル解析により,付随する解析半群がある商空間で指数減衰することがわかり,結果として,

方程式系の時間大域適切性を示すことができた.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Watanabe Keiichi	４．巻 9
２．論文標題 Global Solvability of Compressible?Incompressible Two-Phase Flows with Phase Transitions in Bounded Domains	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Mathematics	６．最初と最後の頁 258～258
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/math9030258	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　3件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 渡邊圭市
２．発表標題 The moving contact line problem in cylindrical domains
３．学会等名 京都大学NLPDEセミナー（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 Keiichi Watanabe
２．発表標題 On the moving contact line problem in cylindrical domains
３．学会等名 International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling, and Numerics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2020年

１．発表者名 渡邊圭市
２．発表標題 On the equilibrium figures of the uniformly rotating liquid
３．学会等名 第14回若手のための偏微分方程式と数学解析（招待講演）
４．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

＿

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関