

令和 6 年 5 月 20 日現在

機関番号：16401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2023

課題番号：20K22312

研究課題名（和文）ハンドル体結び目とその補空間の幾何構造の研究

研究課題名（英文）Research on the geometric structures of handlebody-knots and their complements

研究代表者

村尾 智（Murao, Tomo）

高知大学・教育研究部自然科学系理工学部門・助教

研究者番号：10880304

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：ハンドル体結び目の拡大Alexander不変量の構成に用いる写像の組，MCQ Alexander pairの具体的な構成法を与えた．また，多重共役カンドルの線形拡大における代数構造を整備し，線形拡大に由来したハンドル体結び目の不変量の構成に係る，MCQ Alexander pairの十分性を示した．さらに，多重群ラックの（コ）ホモロジー理論を構築し，有向空間曲面の多重群ラックコサイクル不変量を構成した．当不変量を用いることで，古典的な手法では区別できない有向空間曲面の分類例を与えた．

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は，曲面やハンドル体の3次元球面への埋め込まれ方を解明するために，高精度で扱いやすい不変量の構成を目指したものであり，本研究によって得られた成果は結び目理論，低次元多様体論への寄与が期待されるものである．また，具体的な研究結果である，ハンドル体結び目の拡大Alexander不変量に係る多重共役カンドルの代数構造における基礎理論の構築，多重群ラック（コ）ホモロジー理論を用いた空間曲面の分類研究は，今後の研究の基盤となるとともに，研究の方向性を指し示す結果と言える．

研究成果の概要（英文）：We provided a method to construct a pair of maps, called an MCQ Alexander pair, which is used in the construction of  $f$ -twisted Alexander invariants of handlebody-knots. Additionally, we organized the algebraic structure of a linear extension of a multiple conjugate quandle and showed a sufficiency of MCQ Alexander pairs in constructing handlebody-knot invariants derived from the linear extensions. Furthermore, we constructed the (co)homology theory of multiple group racks and the multiple group rack cocycle invariants for oriented spatial surfaces. Using this invariant, we gave examples of classifications of oriented spatial surfaces that cannot be distinguished by classical methods.

研究分野：トポロジー

キーワード：結び目 ハンドル体結び目 空間曲面 カンドル ラック ねじれAlexander不変量 カンドル（ラック）コサイクル不変量

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

ハンドル体結び目理論の基本問題は、与えられた二つのハンドル体結び目が同値か否かを判定すること、及び各々のハンドル体結び目が持つ幾何的な性質や特徴を解明することである。ところが、ハンドル体結び目は古典的結び目と比べ、強力で扱いやすい不変量が発見されていない状況である。その理由の一つとして、ハンドル体結び目の補空間の幾何構造が古典的結び目と比べ著しく複雑であるという事実が挙げられる。古典的結び目の場合、結び目の(弱)同値性は補空間の位相によって完全に決まることが知られているが、ハンドル体結び目の場合は補空間の位相構造だけでは不十分であることが分かっている。そのため、補空間の位相不変量を元に構成された古典的結び目の不変量を単にハンドル体結び目に適用するだけでは、十分な強さを持つ不変量を構成することはできないという問題がある。

以上のような理由もあり、ハンドル体結び目の分類は現在種数 2, 6 交点以下のものまでしか行われておらず、より強力な不変量の発見が切望されている状況であった。

### 2. 研究の目的

多重共役カンドルと呼ばれるハンドル体結び目の組み合わせ構造を公理化することで得られる代数を用いた、ハンドル体結び目の新たな不変量を構成する。これを用いることで、ハンドル体結び目の分類研究や幾何学的な量の解明を行う。さらに、ハンドル体結び目の一般化である空間曲面に関する研究にも着手し、新たな代数的不変量を構成する。また、実際にその不変量を計算することで、古典的手法では区別することが困難な空間曲面を分類する。

### 3. 研究の方法

多重共役カンドルを用いた、ハンドル体結び目の拡大 Alexander 不変量を主軸として研究に取り組む。また、空間曲面に係る研究については、空間曲面の組み合わせ構造に由来する代数である多重群ラックの (コ) ホモロジー理論を通して空間曲面の分類研究に取り組む。

### 4. 研究成果

本研究の成果の一つは、ハンドル体結び目の拡大 Alexander 不変量に係る多重共役カンドルの線形拡大における代数構造の解明である。近年の研究により、MCQ Alexander pair と呼ばれる多重共役カンドルの線形拡大に対応する写像の組を用いることで、ハンドル体結び目の拡大 Alexander 不変量が構成された。しかし、MCQ Alexander pair の具体例はあまり見つかっておらず、当不変量の計算のために新たな MCQ Alexander pair の発見が必要とされていた。当研究では、カンドルの線形拡大に対応する写像の組、Alexander pair を用いることで、そのカンドルから導出される付随多重共役カンドルの MCQ Alexander pair を構成する手法を確立した。また、多重共役カンドルの任意の線形拡大は MCQ Alexander pair を用いることで構成できることが知られていたが、線形拡大に由来したハンドル体結び目の不変量の構成についても、MCQ Alexander pair を用いれば十分であることを示した。

本研究におけるもう一つの成果は、多重群ラックの(コ)ホモロジー理論を構築し、有向空間曲面の多重群ラックコサイクル不変量を構成したことである。また、既存のラックコサイクルから新たなラックコサイクル、及び多重群ラックコサイクルを構成する手法も確立し、当不変量を計算することで、古典的な手法では区別できない有向空間曲面の分類例を与えた。さらに、可逆性とカイラリティから生じる様々な対称性を持つ有向空間曲面について、全種数における具体例をリストアップした。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Murao Tomo	4. 巻 64
2. 論文標題 On sufficiency of the definition of MCQ Alexander pairs in terms of invariants for handlebody-knots	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Beitrage zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry	6. 最初と最後の頁 689 ~ 719
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13366-022-00652-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Murao Tomo	4. 巻 20
2. 論文標題 Linear extensions of multiple conjugation quandles and MCQ Alexander pairs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	6. 最初と最後の頁 2150045 ~ 2150045
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219498821500456	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsushi Ishii, Shosaku Matsuzaki, Tomo Murao	4. 巻 29
2. 論文標題 A multiple group rack and oriented spatial surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 2050046 ~ 2050046
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216520500467	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tomo Murao	4. 巻 301
2. 論文標題 Affine extensions of multiple conjugation quandles and augmented MCQ Alexander pairs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107531 ~ 107531
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107531	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tomo Murao	4. 巻 292
2. 論文標題 The tunnel number and the cutting number with constituent handlebody-knots	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107632 ~ 107632
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2021.107632	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 村尾智
2. 発表標題 ハンドル体結び目と多重共役カンドル彩色について
3. 学会等名 早稲田大学数学教育学会講演会 (招待講演)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 Tomo Murao
2. 発表標題 Multiple group rack cocycle invariants of spatial surfaces
3. 学会等名 The 18th East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 村尾智
2. 発表標題 Multiple conjugation quandle colorings for handlebody-knots
3. 学会等名 第113回 高知大学数理科学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 村尾智
2. 発表標題 空間曲面と多重群ラックコサイクル不変量
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 村尾智
2. 発表標題 ハンドル体結び目のf-ねじれAlexander不変量とk-同値類
3. 学会等名 N-K00Kセミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 村尾智
2. 発表標題 On invariants for handlebody-knots and spatial surfaces
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology 2021（招待講演）
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 Tomo Murao
2. 発表標題 On constituent links of genus 2 handlebody-knots
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 Tomo Murao
2. 発表標題 On constituent links of genus 2 handlebody-knots and associated multiple conjugation quandle colorings
3. 学会等名 AMS Fall Southeastern Virtual Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 Tomo Murao
2. 発表標題 On constituent links of handlebody-knots and associated multiple conjugation quandle colorings
3. 学会等名 The 17th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 村尾智
2. 発表標題 多重共役カンドルのねじれ微分
3. 学会等名 拡大K00Kセミナー-2020
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 Tomo Murao
2. 発表標題 Multiple group rack colorings for oriented spatial surfaces
3. 学会等名 Friday Seminar on Knot Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 村尾智
2. 発表標題 ハンドル体結び目のディスクシステムとカンドルの連結成分
3. 学会等名 東北結び目セミナー2020
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 村尾智
2. 発表標題 ハンドル体結び目のMCQねじれAlexander不変量
3. 学会等名 結び目の数理III
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 Tomo Murao
2. 発表標題 MCQ twisted Alexander invariants for handlebody-knots
3. 学会等名 The 16th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2020年～2021年

1. 発表者名 村尾智
2. 発表標題 Twisted derivatives for multiple conjugation quandles
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2020年～2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------