

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：52101

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2023

課題番号：20K22314

研究課題名（和文）位相的漸化式の視点からの完全WKB解析の再構成

研究課題名（英文）Reconstructing the exact WKB analysis from the viewpoint of the topological recursion

研究代表者

竹井 優美子（Takei, Yumiko）

茨城工業高等専門学校・国際創造工学科・助教

研究者番号：20879746

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,400,000 円

研究成果の概要（和文）：完全WKB解析と位相的漸化式をつなぐ量子曲線の理論をもとに、完全WKB解析で重要な量であるVoross係数を位相的漸化式から得られる自由エネルギーを用いて構成した。本研究では2変数超幾何微分方程式を考察し、量子化、Voross係数と自由エネルギーの関係式の導出およびVoross係数と自由エネルギーの明示公式の導出等の成果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は背景の全く異なる完全WKB解析と位相的漸化式の間新たな関係性を与えるものである。また、線形常微分方程式と比較して、多変数の偏微分方程式系に対する漸近解析は発展途上である。本研究で得られた成果は、多変数の偏微分方程式系に対する完全WKB解析の発展に向けての一步となることも期待される。

研究成果の概要（英文）：We constructed a relation between Voros coefficients in the exact WKB analysis and the free energy in the topological recursion, based on the theory of quantum curves. In this research we mainly studied the hypergeometric differential equations with 2 variables, and obtained the quantization, the relation between Voros coefficients and the free energy, and the explicit forms of Voros coefficients and the free energy.

研究分野：代数解析

キーワード：完全 WKB 解析 位相的漸化式 量子曲線 Voros 係数 自由エネルギー

1. 研究開始当初の背景

完全 WKB 解析とは特異摂動型の微分方程式に対する研究手法の一つであり、発散級数解である WKB 解 (の Borel 和として得られる解析的な解) が考察の対象である。完全 WKB 解析は、微分方程式の解の大域挙動を解析するのに威力を発揮し、その中でも特に Voros 係数はモノドロミー群や Stokes 現象を記述する際に用いられる非常に重要な量である。完全 WKB 解析はこれまでに、2 階線形常微分方程式、高階線形常微分方程式、そして非線形常微分方程式に拡張されてきた。近年では偏微分方程式系の完全 WKB 解析の理論の構築を目指し、廣瀬三平氏らにより超幾何微分方程式系の変数を制限した 3 階常微分方程式の Stokes 幾何の研究が行われている。それにより、2 変数超幾何微分方程式系の第 2 変数への制限から得られる 3 階常微分方程式の Stokes 幾何は第 1 変数の場合とはかなり様相が異なることも判明している。そのため、これらの方程式の Voros 係数を求めることは重要な課題である。

一方、B.Eynard と N.Orantin によって導入された位相的漸化式は、行列模型の相関関数が満たす loop 方程式を一般化した枠組みであり、閉 Riemann 面上の有理型多重微分を帰納的に定める。この位相的漸化式を用いることにより、自由エネルギーと呼ばれるシンプレクティック不変量も得られることが知られている。

この全く異なる背景をもつ完全 WKB 解析と位相的漸化式を結びつける「量子曲線の理論」が 2012 年頃に見出された。これは、「ある仮定 “admissibility” を満たせば、あるタイプの微分方程式の WKB 解が位相的漸化式を用いて構成できる」ことを主張している。

ここで、「位相的漸化式における Voros 係数の対応物は何か？」という問いが自然に生じる。この問いに答えるために、2018 年に岩木耕平氏と小池達也氏との共同研究を行い、Gauss の超幾何微分方程式の一族について Voros 係数と自由エネルギーの間に成り立つ関係式を導出することに成功した。この関係式は Voros 係数の持つ差分構造を明確にし、さらに自由エネルギーが Voros 係数を支配するより基本的な量であることを示唆するものであった。

2. 研究の目的

岩木耕平氏と小池達也氏との共同研究で考察した Gauss の超幾何微分方程式の一族はいずれも 2 階の常微分方程式であった。本研究の目的は、「より一般の微分方程式の大域解析において、位相的漸化式から得られる自由エネルギーの役割を明確にすること」である。本研究では、隣接関係式を持ち二つの変数を含む 2 変数超幾何微分方程式系を対象に、自由エネルギーを用いて Stokes 現象を記述することを目標とする。

3. 研究の方法

2 変数超幾何微分方程式系の第 1 変数及び第 2 変数への制限から得られる 3 階常微分方程式を考察する。

- (1) 2 変数超幾何微分方程式系には量子化を行う際に課されている仮定 “admissibility” を満たさない方程式が含まれる。この問題については、Riccati 方程式に相当する方程式と位相的漸化式を比較することにより、量子化を与える。
- (2) 相関関数のパラメータについての微分に関する関係式を用いることにより、Voros 係数と自由エネルギーの間に成り立つ関係式を導出する。
- (3) 自由エネルギーや Voros 係数の明示公式を求めるためには、第 2 変数 (第 1 変数) に由来するパラメータへの依存性を明らかにすることが必須である。この問題については、相関関数の第 2 変数 (第 1 変数) に由来するパラメータについての微分に関する関係式を用いて WKB 解を解析することにより、依存性を調べる。また、この結果と (2) を用いることにより、自由エネルギーと Voros 係数の明示公式を導出する。

4. 研究成果

- (1) (1,2,2)-超幾何微分方程式系と (1,1,1,2)-超幾何微分方程式系の第 1 変数への制限から得られる 3 階常微分方程式を考察し、以下の結果を得た。
これらの方程式は量子化を行う際に課されている仮定 “admissibility” を満たさない方程式であるが、変数変換を行うことにより、量子化を得た。
Voros 係数と自由エネルギーの間に成り立つ関係式を導出した。得られた関係式は自由エネルギーが解の大域挙動を記述する際に重要な量であることを意味している。
得られた関係式から自由エネルギーの満たす差分方程式を導出し、自由エネルギーの明示公式も得た。その際に、自由エネルギーが第 2 変数に由来するパラメータに依存しないことも示した。さらに、これらの結果から Voros 係数の明示公式も得られた。
これにより、Voros 係数も第 2 変数に由来するパラメータに依存しないことが示せた。
- (2) (2,3)-超幾何微分方程式系の第 2 変数への制限から得られる 3 階常微分方程式を考察し、Voros 係数と自由エネルギーの間に成り立つ関係式を導出した。また、得られた関係式から

自由エネルギーの満たす差分方程式を導出し、自由エネルギーの明示公式も得た。その際に、自由エネルギーが第 1 変数に由来するパラメータに依存しないことも示した。さらに、これらの結果から Voros 係数の明示公式も得られた。これにより、Voros 係数も第 1 変数に由来するパラメータに依存しないことが示せた。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件）

1 . 発表者名 Yumiko Takei
2 . 発表標題 WKB analysis via topological recursion for hypergeometric differential equations
3 . 学会等名 Physical resurgence: On quantum, gauge, and stringy (国際学会)
4 . 発表年 2022年

1 . 発表者名 Yumiko Takei
2 . 発表標題 Voros coefficients and the topological recursion for the hypergeometric equation of type (1,2,2)
3 . 学会等名 Prospects in microlocal analysis and asymptotic analysis (招待講演)
4 . 発表年 2022年

1 . 発表者名 竹井 優美子
2 . 発表標題 (1,2,2)-超幾何微分方程式の Voros 係数と位相的漸化式
3 . 学会等名 超幾何方程式研究会 2023
4 . 発表年 2023年

1 . 発表者名 Yumiko Takei
2 . 発表標題 WKB analysis via topological recursion for (confluent) hypergeometric differential equations
3 . 学会等名 The applied math seminar (招待講演) (国際学会)
4 . 発表年 2023年

1. 発表者名 Y.-M.Takei
2. 発表標題 Voros coefficients and the topological recursion for the hypergeometric differential equations associated with the 2-dimensional Garnier system
3. 学会等名 Exact WKB Analysis, Microlocal Analysis, Painleve Equations and Related Topics (RIMS Workshop) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 竹井 優美子
2. 発表標題 超幾何微分方程式の完全 WKB 解析と位相的漸化式
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 竹井 優美子
2. 発表標題 (1, 1, 1, 2)-超幾何微分方程式の Voros 係数と位相的漸化式
3. 学会等名 超幾何方程式研究会 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 竹井 優美子
2. 発表標題 完全 WKB 解析と位相的漸化式
3. 学会等名 第 2 回高専間ネットワークによる微分方程式研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Y.-M.Takei
2. 発表標題 WKB analysis via topological recursion for hypergeometric differential equations
3. 学会等名 スペクトル・散乱理論とその周辺（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Y.-M.Takei
2. 発表標題 WKB analysis via topological recursion for hypergeometric differential equations
3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------