

令和 6 年 9 月 9 日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2020～2023

課題番号：20K23323

研究課題名（和文）マッチング問題の代数的拡張に対する組合せ的アプローチ

研究課題名（英文）Combinatorial Approach to Algebraic Extension of Matching Problems

研究代表者

岩政 勇仁（Iwamasa, Yuni）

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：70854602

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、「変数を含んだ行列の行列式次数を求める問題」である重み付きEdmonds問題や、その非可換版である重み付き非可換Edmonds問題に関する理論研究を行った。特に、行列が $2 \times 2$ の小行列に分割できる場合に対する高速かつ組合せ的なアルゴリズムを構築し、それをもとに非可換版において線形シンボリック単項行列の小Dieudonne行列式最大次数列を求める新たな強多項式時間アルゴリズムを提案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年盛んに研究が行われている「代数的組合せ最適化」とよばれる分野において、組合せ的なアプローチで簡潔かつ高速なアルゴリズムの構築や「良い特徴づけ」となりうる新たな最大最小定理の導出を行ったことで、問題の数理構造そのものへの理解を深めることができた。これにより組合せ最適化分野のさらなる発展が期待できる。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we study (Weighted) Edmonds problem --- a problem of computing the rank of a matrix having symbols --- and its noncommutative variant. We devise an efficient and combinatorial algorithm for the case where the given matrix can be partitioned into  $2 \times 2$  matrices. Based on this result, we also develop a strongly polynomial-time algorithm for computing the sequence of the maximum degree of Dieudonne minors of linear symbolic monomial matrices in the noncommutative setting.

研究分野：組合せ最適化

キーワード：マッチング問題 マトロイド 代数的組合せ最適化 多項式時間可解性

## 1. 研究開始当初の背景

Edmonds 問題とは、行列  $A_1, A_2, \dots, A_m$  と変数  $x_1, x_2, \dots, x_m$  を用いて  $A = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_mx_m$  と表される行列  $A$  のランクを求める問題である。これは、様々なバリエーションをもつマッチング問題の統一的な代数的拡張、といえる問題である。例えば、2 部グラフの各枝  $e = (i, j)$  に対して、行列の  $(i, j)$  成分を 1、それ以外を 0 とした行列を  $A_e$  とすると、 $\sum_e A_e x_e$  のランクと 2 部グラフの最大マッチングのサイズが一致する。よって、最大 2 部マッチング問題は、Edmonds 問題として定式化できることがわかる。また、最大 2 部マッチングの拡張である、一般グラフの最大マッチング問題、線形マトロイド交叉問題、線形マトロイドパリティ問題、といった組合せ最適化分野における代表的な問題も、同様に Edmonds 問題として定式化できる。上記で述べたマッチングタイプの組合せ最適化問題は、決定的に多項式時間で解けることが知られている。また、「 $A$  の各変数にランダムに値を代入して得られた変数を含まない行列のランクを求める」という単純な乱択アルゴリズムにより、Edmonds 問題を確率的に多項式時間で解くことができる。一方、Edmonds 問題に対する決定的な多項式時間アルゴリズムが存在するかは分かっておらず、Edmonds 問題の計算複雑度の解明は、「ランダムネスが計算効率にどう影響するか」の本質的な理解につながる。

また、Edmonds 問題で現れる変数  $x_i$  を非可換な変数とみなした行列のランクを求める問題である非可換 Edmonds 問題や、新たに付加した変数  $t$  を用いて  $A(t) = A_1(t)x_1 + A_2(t)x_2 + \dots + A_m(t)x_m$  と表される多項式行列  $A(t)$  の行列式次数/小行列式最大次数列を求める重み付き (非可換) Edmonds 問題に関しても、組合せ最適化問題との関連が指摘されていた。

このように Edmonds 問題やその非可換/重み付き版の問題の諸性質の解明は、組合せ最適化分野でも理論計算機科学分野でも重要な研究テーマとして位置づけられている。

## 2. 研究の目的

本研究課題の目的は、組合せ的なアプローチを用いて、Edmonds 問題の諸性質を解明することである。特に (非可換/重み付き) Edmonds 問題に対する組合せ的な強多項式時間アルゴリズムの構築や、対象の問題が NP かつ co-NP に属することを意味する最大最小定理 (良い特徴づけ) の確立を目標とする。

## 3. 研究の方法

マッチング系統の問題に対する代表的なアプローチとして、増加道アルゴリズムが挙げられる。Ivanyos et al. が提案した非可換 Edmonds 問題に対する多項式時間アルゴリズムは、「ベクトル空間上の増加道アルゴリズム」とみなせるものであり、最大 2 部マッチング問題や線形マトロイド交叉問題に対する増加道アルゴリズムの代数的拡張とみなせる。しかし、彼らのアルゴリズムは、上記の組合せ最適化問題とは異なり、「複雑な代数的操作」を行っており、それがアルゴリズムを煩雑かつ難解にしている。本研究では、「複雑な代数的操作」をできるだけ排除することで、組合せ的な多項式時間増加道アルゴリズム設計を目指す。また、2 部マッチング問題や重み付き 2 部マッチング問題に対しては、König-Egerváry の定理や Egerváry の定理といった良い特徴づけとなる最大最小定理が存在する。それを参考にすることで、Edmonds 問題やその非可換/重み付き版の問題に対する最大最小定理の構築を目指す。

## 4. 研究成果

### (1) $2 \times 2$ 型分割行列のランクを求める組合せ的アルゴリズム設計と最大最小定理構築

Edmonds 問題/非可換 Edmonds 問題の特殊ケースである  $2 \times 2$  型分割行列のランクを求める問題に対し、「分割行列のマッチング」という概念を新たに導入し、2 部マッチング問題に対する古典的な増加道アルゴリズムを適切に拡張することで、既存のものより高速かつ簡潔な組合せ的多項式時間アルゴリズムを構築し、2 部マッチング問題に対する古典的な最大最小定理である König-Egerváry の定理を拡張した良い特徴づけを与えた投稿中論文 “A combinatorial algorithm for computing the rank of a generic partitioned matrix with  $2 \times 2$  submatrices” の改定作業を行い、論文誌 Mathematical Programming, Series A に採択され、出版された。

### (2) $2 \times 2$ 型分割多項式行列の行列式/小行列式最大次数列を求める組合せ的アルゴリズム設計と最大最小定理構築

重み付き Edmonds 問題/重み付き非可換 Edmonds 問題の特殊ケースである  $2 \times 2$  型分割多項式行列の行列式を求める問題に対し、上記 (1) で導入した「分割行列のマッチング」概念を適切に拡

張することで、既存のものより高速かつ簡潔な組合せ的強多項式多項式時間アルゴリズムを構築した。また、重み付き2部マッチング問題に対する古典的な最大最小定理である Egerváry の定理を拡張した良い特徴づけとなる最大最小定理も導出した。これらの成果をまとめた論文 “A combinatorial algorithm for computing the degree of the determinant of a generic partitioned polynomial matrix with  $2 \times 2$  submatrices” が査読付き国際会議である The 22nd Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2021) に採択され、口頭発表を行った。さらに、これらの結果を小行列式最大次数列を求める問題へ適用可能にした。この成果をまとめた論文 “A combinatorial algorithm for computing the entire sequence of the maximum degree of minors of a generic partitioned polynomial matrix with  $2 \times 2$  submatrices” は論文誌 Mathematical Programming, Series A に採択され、出版された。

### (3) 重み付き非可換 Edmonds 問題に対する諸性質の解明

非可換変数  $x_1, x_2, \dots, x_m$  と可換な変数  $t$  を用い  $A(t) = A_1(t)x_1 + A_2(t)x_2 + \dots + A_m(t)x_m$  と表される線形シンボリック多項式行列  $A(t)$  の小行列式最大次数に関する最大最小定理を与えた。さらに、各多項式行列  $A_i(t)$  が  $A_i(t) = A_i t^{d_i}$  という形で表されている線形シンボリック単項式行列  $A(t)$  の場合に、上記のさらに精緻化した最大最小定理を与えた。この結果は(2)で得られたものの拡張となっている。また、この最大最小定理を用いて、線形シンボリック単項式行列の小行列式最大次数列を求める強多項式時間アルゴリズムを与えた。これらの成果と、それを分数線形マトロイドマッチング問題や BL 多面体メンバーシップ問題などに応用した結果を論文 “Algebraic combinatorial optimization on the degree of determinants of noncommutative symbolic matrices” としてまとめ、現在投稿中である。

また、その他 Edmonds 問題と密接に関連しているマトロイド交叉問題に関し、様々な設定のもとでの諸性質の解明や計算量解析、またその工学的応用の模索を行った。

- ・マトロイド交叉の理論を系統樹復元問題に応用し、新たな多項式時間可解なクラスを与えた投稿中論文 “Reconstructing phylogenetic trees from multipartite quartet systems” の改定作業を行い、論文誌 Algorithmica に採択・出版された。

- ・マトロイド交叉上の非線形凸最適化である付値マトロイド交叉問題に特殊な交叉制約を加えた問題が多項式時間可解であることを示した投稿中論文 “Optimal matroid bases with intersection constraints: valuated matroids, M-convex functions, and their applications” の改定作業を行い、論文誌 Mathematical Programming, Series A に採択・出版された。

- ・(Edmonds 問題と特殊クラスである) 線形マトロイド交叉に対して、「遷移可能性」という観点から研究を行った。それにより、有向木 (グラフ的マトロイドと分割マトロイドの交叉) の遷移可能性判定問題が多項式時間で解けることが判明した。この成果をまとめた論文 “Reconfiguring (non-spanning) arborescences” が論文誌 Theoretical Computer Science に採択・出版された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takehiro Ito, Yuni Iwamasa, Yasuaki Kobayashi, Yu Nakahata, Yota Otachi, and Kunihiro Wasa	4. 巻 943
2. 論文標題 Reconfiguring (non-spanning) arborescences	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 131 ~ 141
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.tcs.2022.12.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takehiro Ito, Yuni Iwamasa, Naonori Kakimura, Naoyuki Kamiyama, Yusuke Kobayashi, Shun-ichi Maezawa, Yuta Nozaki, Yoshio Okamoto, and Kenta Ozeki	4. 巻 19
2. 論文標題 Monotone Edge Flips to an Orientation of Maximum Edge-Connectivity a la Nash-Williams	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 ACM Transactions on Algorithms	6. 最初と最後の頁 1 ~ 22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3561302	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yuni Iwamasa	4. 巻 -
2. 論文標題 A combinatorial algorithm for computing the entire sequence of the maximum degree of minors of a generic partitioned polynomial matrix with $2 \times 2$ submatrices	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematical Programming, Series A	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirai Hiroshi and Iwamasa Yuni	4. 巻 -
2. 論文標題 A combinatorial algorithm for computing the rank of a generic partitioned matrix with $2 \times 2$ submatrices	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-021-01676-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hirai Hiroshi and Iwamasa Yuni	4. 巻 -
2. 論文標題 Reconstructing phylogenetic trees from multipartite quartet systems	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algorithmica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00453-022-00945-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuni Iwamasa and Kenjiro Takazawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Optimal matroid bases with intersection constraints: valuated matroids, M-convex functions, and their applications	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Programming	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10107-021-01625-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuni Iwamasa	4. 巻 -
2. 論文標題 A combinatorial algorithm for computing the degree of the determinant of a generic partitioned polynomial matrix with $2 \times 2$ submatrices	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the 22nd Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2021)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Yuni Iwamasa
2. 発表標題 A combinatorial algorithm for computing the entire sequence of the maximum degree of minors of a generic partitioned polynomial matrix with $2 \times 2$ submatrices
3. 学会等名 The 12th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications (JH 2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岩政 勇仁
2. 発表標題 2x2型分割多項式行列の行列式次数を求める組合せ的多項式時間アルゴリズム
3. 学会等名 日本応用数理学会 2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩政 勇仁
2. 発表標題 2部マッチング問題の代数的拡張
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 研究部会「最適化手法とアルゴリズム」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yuni Iwamasa
2. 発表標題 Optimal matroid bases with intersection constraints: Valuated matroids, M-convex functions, and their applications
3. 学会等名 The 16th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC 2020) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩政 勇仁
2. 発表標題 2部マッチング理論の代数的一般化について
3. 学会等名 第32回RAMP数理最適化シンポジウム (RAMP 2020) (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究成果  
<https://www.lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp/iwamasa/ja/research.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------