

令和 6 年 10 月 1 日現在

機関番号：12613

研究種目：国際共同研究加速基金（国際共同研究強化(A））

研究期間：2022～2023

課題番号：20KK0310

研究課題名（和文） μ -等角写像の数値解析と複素力学系への応用研究課題名（英文）Analysis of μ -conformal mappings and its application to complex dynamics

研究代表者

川平 友規（KAWAHIRA, Tomoki）

一橋大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：50377975

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,800,000円

渡航期間：10ヶ月

研究成果の概要（和文）：本研究課題は、基課題である「Goldberg-Milnor予想の解決に向けた μ -等角摂動の研究」（基盤C,19K03535）のさらなる発展を目指し、数値解析の側面からアプローチするものである。具体的には、複数の周期点が退化した状態である放物的周期点をもつような複素力学系を「おだやかに」摂動し、力学系のカオス部分を本質的に保つことができるか、という問題（Goldberg-Milnor予想）に対し、「 μ -等角写像」とよばれる擬等角写像を含んだ同相写像のクラスを適用し、解決を試みる。本研究ではとくに、退化（歪曲度）が激しい「 μ -等角写像」に対し、誤差評価付きの数値計算手法を実装することを目標とした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

一般に時間発展するシステムを「力学系」とよぶが、力学系を決定するパラメータは多くの場合振動や摂動にさらされており、ある範囲で絶え間なく揺らぎ続けていると考えるのが自然である。一方で、そのような力学系の振る舞いが将来にわたって予測可能であるためには、力学系全体がパラメータの変化に対して「安定」している必要がある。本研究では、パラメータの変化に対して「不安定」なシステムにむしる着目し、パラメータの変化の方向を限定することで、システムの変化を最小限に抑えるための研究を数値解析の観点から行った。

研究成果の概要（英文）：This research project aims to further develop the research subject, "Research on μ -quasiconformal perturbations toward solving the Goldberg-Milnor conjecture" (Kiban C, 19K03535), through numerical analysis. Specifically, it addresses the Goldberg-Milnor conjecture, which questions whether the chaotic parts of a dynamical system can be essentially preserved when "gently" perturbing a complex dynamical system that has parabolic periodic points, a state where multiple periodic points have degenerated. To tackle this, the project applies a class of homeomorphisms that includes quasiconformal mappings known as " μ -conformal mappings." In particular, the research aims to implement numerical computation methods with error estimates for " μ -conformal mappings" that exhibit significant degeneration and distortion.

研究分野：複素力学系理論

キーワード：複素力学系 放物的分岐 擬等角写像 Beltrami方程式 μ -等角写像 数値解析

1. 研究開始当初の背景

複素係数の有理式が定める Riemann 球面上の有理関数 f に対し、その反復合成によって得られる力学系を f による (1次元有理) 複素力学系とよぶ。これを時間発展する動的システムとみなすとき、関数 f は点の軌道を定める、いわば「運動法則」である。では、この「運動法則」を微小変化させた場合、系全体はどの程度変化するのだろうか？これが本研究の根底にある、力学系の「安定性」の問題である。

力学系の放物的分岐。1980年頃、Douady と Hubbard は多項式力学系に付随する外射線とよばれる曲線族の組み合わせ論的構造に着目し、2次多項式からなる力学系族の退化と分岐を詳細に調べた。すなわち、力学系の「運動法則」のパラエティを制御するパラメーター空間 (多項式の係数空間) を考え、パラメーターの変化に応じて安定な力学系がいったん不安定な力学系となり、さらにまた安定な力学系へと推移する、といった現象についての研究を推し進めたのである。「外射線の理論」はとくにパラメーター空間の研究に有効で、いわゆる Mandelbrot 集合の境界 (境界は「構造安定でない 2 次多項式」の集合に相当する) がもつ複雑なフラクタル構造も、やはり組み合わせ論的な情報で記述できることを示した。

Goldberg-Milnor 予想。『複素力学系の Goldberg-Milnor 予想』は以上のような背景のもとで生まれる。Goldberg と Milnor は 1993 年の論文において、Douady-Hubbard の外射線の理論を発展させるが、その際に着目したのが「周期点の退化と分岐」であった。とくに放物的周期点とよばれるタイプの周期点は、複数の周期点が退化した状態であり、 f を摂動させれば (すなわち多項式 f の係数を微小変化させれば)、退化していた周期点は複数の周期点に分岐する。このように、放物的周期点が摂動により分岐し、力学系が質的に変化する現象を力学系の放物的分岐という。Goldberg と Milnor は外射線の組み合わせ論的な考察から、「放物的周期点をもつ多項式 f は、安定な力学系の族が別の安定な力学系の族に移行する過程で生じるものであろう」と予測し、次の予想を立てた：『放物的周期点をもつ多項式 f に対し、以下を満たす「特定方向の」摂動 g が必ず存在する： f の放物的周期点は g の安定な吸引的周期点と反発的周期点のペアに分岐するが、 g の力学系をカオス部分 (Julia 集合) に制限したものは f のその位相的変形になっている。』これは、放物的周期点をもつ多項式 f は「弱い意味での構造安定性」を持つことを示しており、 g の属する力学系の変形族が穏やかに退化したものだ結論できる。また、摂動の方向により放物的分岐を制御することで、パラメーター空間内で力学系の安定な変形族がどのように配置されているかについて本質的な情報を得ることができるのである。

Goldberg と Milnor は「多項式」の力学系に対してこの予想を立てたが、まったく同じ文言で「有理関数」が生成する力学系についての予想を述べることができる。

2. 研究の目的

基課題について。本研究の基課題である「Goldberg-Milnor 予想の解決に向けた μ -等角摂動の研究」においては解決を目指したのは、この一般化された『Goldberg-Milnor 予想』(以下『GM 予想』) である。Goldberg と Milnor は多項式特有の組み合わせ論的な考察に基づいて『GM 予

想』を立てたが、当時はまだ2次多項式族のような比較的単純な例でしか成立が確かめられておらず、根拠に乏しいものであった。しかも有理関数に対してはそのような組み合わせ論的な議論が適用できない。研究代表者は問題の解析的側面に着目し、予想の正否を退化 Beltrami 方程式とよばれる偏微分方程式の解の存在にまで帰着させた。本研究の基課題の目的は、力学系不変な退化 Beltrami 方程式の解法を追求し、『GM 予想』の肯定的解決を目指すことである。

Beltrami 方程式とは等角構造 (= 複素構造) の変形度をあらかじめ指定したとき、それを実現する同相写像が満たすべき方程式である。たとえば擬等角写像はその解として典型的であり、理論的にも十分に整備されているため、複素力学系の研究では欠かすことができない道具となっている。一方、退化 Beltrami 方程式とは「擬等角写像が解とならない Beltrami 方程式」のことであり、一般には解の存在すら保証されない。複素力学系への応用も数えるほどしかなく、しかも「退化の度合い」が十分に小さいものに限られていた。本研究で扱う退化 Beltrami 方程式は「退化の度合い」が格段に大きく、既存の結果では歯がたたない。その代わりに、変形度が力学系不変な形で指定されているため、特殊な解法が存在すると期待される。

本国際共同研究では、基課題で扱う退化 Beltrami 方程式に対し、数値解析的なアプローチを試みる。具体的には、複素力学系全般への応用を視野に入れつつ、既存の Beltrami 方程式に対する数値解析の手法を総括し、さらに退化した Beltrami 方程式について実現可能な誤差評価付きの数値計算手法を作ることと、その実装を目指すものである。

3. 研究の方法

退化 Beltrami 方程式の可解性についての一般論は確立されていないため、基本的な戦略としては、退化 Beltrami 方程式を直接解こうとするのではなく、解に収束するような擬等角写像の列を構成することになる。すなわち、「擬等角写像の理論」、あるいは、それが満たす「退化していない Beltrami 方程式の理論」をベースに、その収束列が満たすべき性質を詳しく調べることが重要である。「擬等角写像の理論」や「退化していない Beltrami 方程式の理論」は、1960 年代から Ahlfors と Bers や Bojarski らによって解析的に使いやすい形に整備され、Teichmüller 理論、Klein 群論の発展に本質的な寄与をした。一方で、(本国際共同研究のような)数値解析という側面からの研究は、実質的に 1990 年代後半から 2000 年代にかけて成立したといっても良いだろう。本国際共同研究では、既存の Beltrami 方程式の理論的解法や、その数値解析の実装に関する文献を網羅的にチェックし、退化 Beltrami 方程式の解法として活用できそうなものを精査する作業を行った。とくに、誤差評価も含めて解の存在を保証できそうなアプローチとして、共同研究者である Gaidashev 氏らによる不動点定理とフーリエ変換を用いる手法や、Yanagihara による大域解の構成法の一般化を目指した。数値解析の実装という部分では、Porter-Shimauchi 法を用いた *Mathematica* による Beltrami 方程式の解の可視化や、Julia を用いた Gaidashev-Khmelev 法の実装に取り組んだ。

4. 研究成果

・GM 予想の解決に必要な退化 Beltrami 方程式の解を構成するため、幾何学的函数論における種々の成果を統合し、解が適切な Sobolev 空間に入るための条件や、パラメータをいれて恒等写

像に一樣収束できるための条件について研究を行った。また、摂動前の (Julia 集合上の) 力学系に対し、それらの条件が満たされるための十分条件を与えた。たとえば、すでに GM 予想が成立する「幾何学的有限」とよばれるクラスで、放物的周期点やその逆像の重複度が 2 の場合がそれに該当する。また、同様の議論がある種の Klein 群に対しても成立することが確認した。現在、さらなる改良を試みつつ、論文執筆の準備をしているところである。

- ・複素力学系やある種の Fuchs 群の擬等角変形を (数値的に Beltrami 方程式を解くことで) 可視化するプロジェクトをすすめ、これについて国内外の研究集会で講演を行った。

- ・Gaidashev-Khmelev 法は Beltrami 方程式の台がコンパクトでない場合にも適用できる数値解法だが、D. Gaidashev 氏と共同でその誤差評価の改良を目指し、Yanagihara による Beltrami 方程式の大域解の構成法を重みつき Young 不等式によって定式化する研究を行なった。

- ・D. Gaidashev 氏と共同で、複素 2 次元 Henon 写像の horseshoe locus からの退化速度を評価する研究を行なった。また、H. Inou 氏 (京都大) と反正則 2 次多項式の力学系族について、実 2 次元写像として同様の速度評価ができないかを考察した。

- ・Y.-C. Chen 氏 (Academia Sinica) と共同で、力学系の正則運動 (各点の動きが正則関数になっているような擬等角変形) の退化の速度評価を行い、適切な経路を通して力学系が放物的周期点をもつように退化させるとき、力学系が片側ヘルダー連続に退化するようであることを示した。また、そのヘルダー指数は放物的周期点の重複度のみに依存することを示した。この成果についても、国内外の研究集会で講演を行った。また、関連論文を執筆し、雑誌に受理された。

- ・以前、M. Kisaka 氏 (京都大) と共同で、Mandelbrot 集合の境界に、「ほとんどすべての形の」Julia 集合のコピーが、「ほとんど等角な擬等角写像による埋め込み」として、稠密に存在していることを証明したが、その中核的手法にはバリエーションがあり、そのバリエーションに基づいた証明を論文にまとめ雑誌へ投稿した。

- ・J. Lee 氏 (東工大) と共同で、非アルキメデスの力学系の Julia 集合が弱い拡大性 (より正確には、ある種の非収縮性) をもつとき、Julia 集合の各点ごとの軌道を安定に摂動できることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Chen Yi-Chuan, Kawahira Tomoki	4. 巻 377
2. 論文標題 From hyperbolic to parabolic parameters along internal rays	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4541-4583
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/9080	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 川平友規
2. 発表標題 Visualization of quasiconformal deformations of holomorphic dynamics
3. 学会等名 RIMS 共同研究「複素力学系と関連分野」（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川平友規
2. 発表標題 J-stability in complex and non-Archimedean dynamics
3. 学会等名 2022 NCTS Japan-Taiwan Joint Workshop on Dynamical Systems（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Similarity between the Mandelbrot set and the Julia sets, and more
3. 学会等名 Around the Mandelbrot set: A conference celebrating the 60th birthday of Mitsuhiro Shishikura（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Zalcman functions for holomorphic diffeomorphisms of \mathbb{C}^2
3. 学会等名 Atelier franco-japonais de dynamiques reelles et complexes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Derivatives of mildly degenerating holomorphic motions of the quadratic Julia sets
3. 学会等名 Workshop on Holomorphic Dynamics -- MLC and tools for studying it (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tomoki Kawahira
2. 発表標題 Visualization of quasiconformal deformations of holomorphic dynamics
3. 学会等名 Holomorphic Day (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

個人ホームページ http://www1.econ.hit-u.ac.jp/kawahira

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
主たる渡航先の主たる海外共同研究者	デニス ガイダシェフ (Denis GAIDASHEV)	Uppsala大学・Department of Mathematics・Associate Professor	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------