

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 15 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2009～2013

課題番号：21244002

研究課題名(和文) Floer 理論、正則曲線の理論と symplectic 構造・接触構造の研究

研究課題名(英文) Studies on Floer theory, theory of holomorphic curves and symplectic structures, contact structures

研究代表者

小野 薫 (ONO, Kaoru)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：20204232

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 31,800,000 円、(間接経費) 9,540,000 円

研究成果の概要(和文)：symplectic 構造は、古典力学における Hamilton の運動方程式の定式化などで重要な幾何構造である。近年は、symplectic 構造そのものの幾何学的研究が進展し、ミラー対称性の数学的研究と相俟って多くの研究者が関心を持つ対象となっている。研究代表者は、symplectic 幾何学で特に重要な Floer 理論とその応用の研究を続けている。今研究計画においては、Floer 理論をトーリック多様体とその Lagrange トーラスファイバーに対して、具体的な研究をし、いくつかの興味ある結果を得た。

研究成果の概要(英文)：Symplectic structure is a geometric structure, which appeared in the understanding of Hamilton's equation of motion. In recent years, there has been profound development in the geometric study of symplectic structures. In particular, combined with the mathematical study on mirror symmetry, symplectic geometry attracts attentions from many researchers. The investigator has been working on Floer theory, which plays a significant role in symplectic geometry, and its applications. In this research project, we studied Floer theory for Lagrangian torus fibers in toric manifold in a concrete way and obtained various interesting results.

研究分野：シンプレクティック幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：symplectic 構造 Floer 理論 正則曲線 Lagrange 部分多様体 A-無限大構造 トーリック多様体

1. 研究開始当初の背景

Symplectic 幾何学において、Gromov 以来の正則曲線の理論と Floer 理論は重要な役割を果たしてきた。研究代表者は深谷賢治氏、Yong-Geun Oh 氏、太田啓史氏との共同研究で Lagrange 部分多様体の Floer 理論の枠組みを整備し、様々な応用を得た。これらの研究成果を本として出版すべく準備を進めていた。(2009 年に American Mathematical Society/International Press から 2 巻の本として出版された) 最終稿を準備する際に、compact toric 多様体の Lagrangian torus fiber の Floer 理論を具体的に調べることで様々な応用ができることが分ってきた。

2. 研究の目的

Symplectic 幾何学は複素幾何学、代数幾何学、数理論理学などと関わりあいながら進展している分野である。Symplectic 構造の重要な結果の多くは正則曲線の理論や Floer 理論を応用することで得られてきた。研究代表者は Gromov-Witten 不変量、周期的 Hamilton 系の Floer homology の構成 (深谷氏との共同研究)、Lagrange 部分多様体の Floer 理論の一般論(深谷氏、Oh 氏、太田氏との共同研究) などの成果を挙げてきた。本研究計画では、その理論を発展させ、compact toric 多様体などで具体的に研究し、応用することを目標とする。また、symplectic 幾何学は、接触構造、特異点論なども深く関係するため、周辺分野の進展にも気を払って総合的な研究を進めていく。

3. 研究の方法

通常は研究代表者、研究分担者がそれぞれ研究活動をし、必要に応じて連絡を取り合う。研究を進めるためには、他の研究者の最新の成果を知ることや、こちらの研究成果の公表のため、研究集会に出席したり、研究集会を企画、開催することが必要である。講演依頼を受けた場合はできるだけ引き受け、研究交流を進めた。Pacific Rim Mathematical Conference の symplectic topology session の organizer Cheol-Hyun Cho 氏からは招聘講演者の推薦を依頼されたので、数名の講演者の旅費を本研究計画から支出した。また、mathematical physics session の organizer Bai-Ling Wang 氏からも相談を受けたので、本研究計画の分担者の秦泉寺雅夫氏に協力を依頼した。Symplectic 幾何学と関係の深い Kahler 幾何学の最新の成果について Gang Tian 氏を「高木レクチャー」の講演者として招聘した際の旅費も本研究計画から支出した。その他にも、Yuri Chekanov, Mohan Bhupal, River Chiang, Urs Frauenfelder, Otto van Koert, Naichung Conan Leung, Yakov Eliashberg, Viktor Ginzburg, Bai-Ling Wang, Sheel Ganatra の各氏に札幌あるいは京都に招聘した。また、微分式系の幾何学、特異点論など symplectic 幾何学と関わりのある分野を幅広く研究するために、分担者の山口佳三氏 (2011 年度ま

で)、石川剛郎氏 (2012 年度まで)、泉屋周一氏の監督下に若手研究者の雇用をした。また、symplectic 幾何学に関わりを持つ諸テーマについての研究集会、講演会を研究分担者が企画、開催したことは、見識を深め、知見を広めるのに役立った。

4. 研究成果

Compact toric 多様体の Lagrangian Floer 理論は、potential 関数 (一般の場合に 2009 年に出版した本の中で導入された) の特異点論で支配されることを明らかにした。その応用として、Hamilton 変形で自分自身と交わらない位置に移すことができない Lagrange torus, 特に運動量写像の逆像として現れる Lagrangian torus fiber, の十分条件を与えることや、自分自身と外せる場合にはそのために必要な Hamilton 変形の Hofer norm と呼ばれる量の下からの評価をえた。また、mirror symmetry の観点からは、上記の potential 関数に対する Jacobi 環を然るべく定義すると、それが量子 cohomology 環と同型になること、更には、量子 cohomology 環上の Poincare pairing を potential 関数の Jacobi 環上に移したものの記述を potential 関数のすべての臨界点が非退化な場合に与えた。(M. Abouzaid 氏と我々の準備中の論文の結果を使えば、toric 多様体の homological mirror symmetry についてある程度満足いく主張が従う。)

閉 symplectic 多様体上の対合で、symplectic 形式を -1 倍に移すものを anti-symplectic involution と呼ぶ。Anti-symplectic involution の不動点集合として現れる Lagrange 部分多様体の Lagrange Floer 理論について、Floer cohomology が定義されるための障害 (2009 年出版の本で与えられた) が消えるための十分条件、更にはその状況で Floer cohomology が非自明になるための十分条件を与えることができるが、その証明で必要となる circle system 付の stable map の moduli 空間の構成の詳細について論文に加筆修正を行った。

Mohan Bhupal 氏を招聘した際に、数年前から彼と行っていた複素曲面の孤立商特異点のリンクの極小 symplectic 充填の分類についての論文の修正を行い、この研究期間中に出版公表した。

深谷氏と小野は 1990 年代後半に倉西構造による仮想的な基本類の構成を行い、Oh 氏、太田氏を含めた 4 名による Lagrangian Floer 理論ではそれを chain level での議論にして用いた。近年、この構成の詳細について関心が増しているため、この構成の詳細を expository article として纏めた。将来はより広い層にも読まれるような形にしたいと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, I, *Duke Mathematical Journal* 151 (2009), 23-174. 査読有
DOI:10.1215/00127094-2009-062

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Canonical models of filtered A_∞ algebras and Morse complexes, *New Perspectives and Challenges in Symplectic Field Theory*, CRM Proceedings and Lecture Notes 49, 201-227, Amer. Math. Soc., 2009. 査読有

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Anchored Lagrangian submanifolds and their Floer theory, *Mirror Symmetry and Tropical Geometry*, *Contemporary Mathematics* 527, 15-54, 2010. 査読有

H. Ohta and K. Ono, An inequality for symplectic fillings of the link of a hypersurface $K3$ singularities, *Algebraic Topology-old and new*, Banach Center Publications 85 (2009), 93-100. 査読有

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, II, *Selecta Mathematica New Series* 17 (2011), 609-711. 査読有
DOI:10.1007/s00029-011-0057-z

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Toric degeneration and non-displaceable Lagrangian tori in $S^2 \times S^2$, *International Mathematical Research Notices* 2012, 2942-2993. 査読有
DOI:10.1093/imrn/rnr128

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds: survey, *Surveys in Differential Geometry* Vol. XVII, 229-298, 2012 査読無

M. Bhupal and K. Ono, Symplectic fillings of links of quotient surface singularities, *Nagoya Mathematical Journal* 207 (2012), 1-45. 査読有
DOI:10.1215/00277630-1630014

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Displacement of polydisks and Lagrangian Floer theory, *Journal of Symplectic Geometry* 11 (2013), 231-268. 査読有
DOI:http://dx.doi.org/10.4310/JSG.2013.v11.n2.a4

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory over integers:

spherically positive symplectic manifolds, *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, Vol. 9 (2013), 189-289. 査読有
DOI:http://dx.doi.org/10.4310/PAMQ.2013.v9.n2.a1

[学会発表] (計 36 件)

K. Ono, General story of Lagrangian Floer theory, *East Asian Symplectic Conference 2009*, Academia Sinica, Taipei, Taiwan, May 6-10, 2009. 招待講演

K. Ono, Floer theory for Lagrangian submanifolds, *Symplectic Geometry and Physics*, Beijing International Center for Mathematical Research, Beijing, China, May 12-16, 2009. 招待講演

K. Ono, Floer theory for Lagrangian submanifolds, *Symplectic Geometry Session in the first PRIMA Congress*, University of New South Wales, Sydney, Australia, July 6-10, 2009. 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds-critical point theory of the potential function, *Fifth Franco-Japanese Symposium on Singularities*, IRMA, Strasbourg, August 24-28, 2009. 招待講演

K. Ono, Remarks on symplectic fillings of links of isolated surface singularities, *NIMS International conference on symplectic and contact low dimensional topology*, Seoul National University, Korea, November 12, 2009. 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory on symplectic resolution/deformation of singular toric surfaces, *Algebraic structures in the theory of holomorphic curves*, MSRI, Berkeley, U.S.A., November 19, 2009. 招待講演

K. Ono, Lectures on Lagrangian Floer theory (4 lectures), *Institute of Mathematical Sciences*, Chinese University of Hong Kong, April 27, 30, 2010. 招待講演

K. Ono, Toric degeneration and non-displaceable tori in $S^2 \times S^2$, *Mini Conference on Geometry*, Institute of Mathematical Sciences, Chinese University of Hong Kong, April 29, 2010. 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, *International*

Conference on Symplectic Geometry and Physics, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China, May 19, 2010. 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, GCOE and Horiba International Symposium Knots, Contact Geometry and Floer homology, Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, May 25, 2010. 招待講演

K. Ono, Bulk deformations in Lagrangian Floer theory, Symplectic Geometry and Transformation Groups, International Center for Mathematical Sciences, Edinburgh, Scotland, July 6, 2010. 招待講演

小野 薫, compact toric 多様体上の Lagrange Floer 理論について、幾何学シンポジウム、2010年8月8日 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, Plenary Lecture at International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, Colima University, Mexico, October 1, 2010. 招待講演

K. Ono, Lectures on Lagrangian Floer theory (3 lectures), 31st Winter School Geometry and Physics, Hotel Sumava, Srni, Czech Republic, January 15-22, 2011. 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, Enumerative Questions in Complex and Tropical Geometry, MFO, Oberwolfach, Germany, April 19, 2011. 招待講演

K. Ono, Bulk deformations in Lagrangian Floer theory, Symplectic Geometry and Related Topics, Sichuan University, Chengdu, China, May 25, 2011. 招待講演

K. Ono, Non-displaceable Lagrangian tori in $S^2 \times S^2$. POSTECH workshop on Symplectic Topology and Contact Topology, Pohang, Korea, August 17, 2011. 招待講演

K. Ono, Kuranishi structures and the construction of A_∞ -structures (2 lectures), Workshop on Symplectic Field Theory V, Hamburg University, Germany, August 22, 23, 2-11. 招待講演

K. Ono, Lagrangian submanifold in $S^2 \times S^2$. Workshop on Symplectic Field Theory V,

Hamburg University, Germany, August 26, 2011. 招待講演

K. Ono, Displacement energy of Lagrangian submanifolds and the torsion of Lagrangian Floer cohomology, Workshop on Contact and Symplectic Geometry, University of Lodz, Poland, September 14, 2011. 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, the 10th Pacific Rim Geometry Conference, 2011, Osaka-Fukuoka, Osaka City University, December 3, 2011. 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds, Toric Geometry, MFO, Oberwolfach, Germany, April, 2012. 招待講演

K. Ono, Floer theory for Lagrangian submanifolds, the first symposium of the Institute for Basic Sciences in 2012, Lotte Hotel, Seoul, Korea, April 27, 2012. 招待講演

K. Ono, Spectral invariants and Lagrangian Floer theory, Symplectic Geometry and Mathematical Physics, Beijing International Center for Mathematiccal Research, China, June 2012. 招待講演

K. Ono, Non-displaceable Lagrangian tori, Interactions between Algebra and Dynamics in Symplectic Topology, Technion, Haifa, Israel, June 2012. 招待講演

K. Ono, Spectral invariants and Lagrangian Floer theory, The conference on mirror symmetry and related topics, Kuming University of Science and Technology, China, August 21, 2012. 招待講演

小野 薫, Lagrange 部分多様体の displaceability と displacement energy について、トポロジーシンポジウム、佐賀大学 2012年8月14日 招待講演

小野 薫, Hamilton 微分同相写像の spectral 不変量とその応用、日本数学会秋季総合分科会 企画特別講演、九州大学、2012年9月20日 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory (2 lectures), UK-Japan Mathematical Forum on Algebraic and Symplectic Geometry,

Keio University, Yokohama, Japan,
January 25,26, 2013. 招待講演

K. Ono, Lectures on Lagrangian Floer theory (five 2.5 hour lectures), Beijing Internatinal Center for Mathematical Research, China, May 13-17, 2013. 招待講演

K. Ono, Anti-symplectic involution and Floer cohomology, Symplectic Geometry and Hamiltonian Dynamics Session the second PRIMA Congress, Shanghai Jiao Tong University, China, June 25, 2013. 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds, Pacific Rim Mathematics Conference, Mathematical Physics Session, Sapporo Convention Center, July 1, 2013. 招待講演

K. Ono, Non-displaceable Lagrangian submanifolds, Pacific Rim Mathematical Conference, Symplectic Topology Session, Sapporo Convention Center, July 4, 2013. 招待講演

K. Ono, Lagrangian Floer theory: the case of toric manifolds, Calabi-Yau Geometry and Mirror Symmetry Conference, TAIDA, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, January 6, 2014. 招待講演

K. Ono, Frobenius manifold atructure and Lagrangian Floer theory for toric manifolds, Lecture I, Kavli IPMU, the University of Tokyo, February 10, 2014. 招待講演

K. Ono, Lecture II on Kuranishi structures, Workshop on moduli spaces of pseudo-holomorphic curves I, Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook, U.S.A., March 18, 2014. 招待講演

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者 小野 薫
(Kaoru Ono)

京都大学数理解析研究所・教授
研究者番号：20204232

(2)研究分担者 泉屋周一
(Shyuichi Izumiya)

北海道大学大学院理学研究院・教授
研究者番号：80127422

(3)研究分担者 秦泉寺雅夫
(Masao Jinzenji)

北海道大学大学院理学研究院・准教授
研究者番号：20322795

(4)研究分担者 松下大介
(Daisuke Matsushita)

北海道大学大学院理学研究院・准教授
研究者番号：20204232

(5)研究分担者 石川剛郎 平成 21－24 年度
(Goo Ishikawa)

北海道大学大学院理学研究院・教授
研究者番号：50176161

(6)研究分担者 山口佳三 平成 21－23 年度
(Keizo Yamaguchi)

北海道大学大学院理学研究院・教授
研究者番号：00113639

(7)研究分担者 栢田幹也 平成 24－25 年度
(Mikiya Masuda)

京都大学数理解析研究所・教授
研究者番号：20204232

(8)研究分担者 高倉 樹 平成 24－25 年度
(Tatsuru Takakura)

中央大学理工学部・准教授
研究者番号：30268974

(3)連携研究者
()

研究者番号：