

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月 24日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2009～2012

課題番号：21244004

研究課題名（和文）可積分系を用いた微分幾何学と量子コホモロジーの新しい関係の構築

研究課題名（英文）Exploitation of new relations between differential geometry and quantum cohomology in the context of integrable systems

研究代表者

Martin Guest (GUEST MARTIN)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：10295470

研究成果の概要（和文）：

報告者は興味深い非自明な現象を示す、いくつかの重要な例についての進展を得ることが出来た。論文“Nonlinear PDE aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa” (M. Guest and C.-S. Lin, J. reine angew. Math., 印刷中)では、 tt^* -戸田方程式の、滑らかな解の族の存在を示した。これは技術的観点に於けるブレイクスルーである、すなわち、既存のループ群論的アプローチが適用できない非コンパクトの場合にも、偏微分方程式論が有用であることを示したことは大きな進展である。“Isomonodromy aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa I. Stokes data” (M. Guest, A. Its, and C.-S. Lin, arXiv:1209.2045) に於いては tt^* -戸田方程式の解の大域的な滑らかさを、付随する線形方程式のモノドロミーデータ（ストークスデータ）に関連付けることにより、また別の技術的側面に関するブレイクスルーがあった。より詳しくには、 tt^* -戸田方程式の全ての滑らかな大域解に対して、そのストークスデータを明示的に計算することが出来た。これらの技術はまた、微分幾何学に於けるその他の問題にも適用可能であると推測される。

研究成果の概要（英文）：

We have made progress with some key examples, which demonstrate interesting and nontrivial phenomena. In “Nonlinear PDE aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa” (M. Guest and C.-S. Lin, J. reine angew. Math., 2012, in press) the existence of a family of smooth solutions of the tt^* -Toda equation was established. This was a technical breakthrough: p. d. e. methods are well suited to the noncompact case, where standard loop group methods fail. In “Isomonodromy aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa I. Stokes data” (M. Guest, A. Its, and C.-S. Lin, arXiv:1209.2045), a second technical breakthrough was made, by relating the global smoothness of the solutions to the monodromy data (Stokes data) of an associated linear equation. This Stokes data was computed explicitly for all globally smooth solutions of the tt^* -Toda equation. We expect that these techniques will be applicable to other problems in differential geometry.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	5,900,000	1,770,000	7,670,000
2010年度	5,500,000	1,650,000	7,150,000
2011年度	4,500,000	1,350,000	5,850,000
2012年度	4,200,000	1,260,000	5,460,000
年度			
総計	20,100,000	6,030,000	26,130,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード： 幾何学、可積分系、量子コホモロジー

1. 研究開始当初の背景

「微分幾何学と可積分系」の分野はある程度成熟してきており、いくつかの重要な分類問題が解決され、多くの顕著な例が構成されてきた。これらの分野は日本を始め世界中の数学者により研究され、発展してきた。これらの発展により更に新しい問題が出現してきているが、これは微分幾何学と可積分系に更に発展する可能性があることを表している。しかしながらいくつかの方向において、現在の手法を用いた研究は限界に達していると思われる。そしてこれらの分野を更に発展させる為に、新しい考え方が必要となっている。本研究の目的は微分幾何学と量子コホモロジー、フロベニウス多様体論、 tt^* 構造 (topological-antitopological fusion) を取り巻く分野との直接的な関係を明らかにすることである。調和写像と量子コホモロジー理論について、"From Quantum Cohomology to Integrable Systems" (M. Guest, Oxford University Press, 2008) では、双方について体系的な理論を目指した"展望"が説明されている。ここでは双方の背景について別々に同じ用語を用いて述べている。また、ある種の D -加群のような2つの分野が密接な関係をもつことを実証するような数学的対象について、詳しく説明がされている。本研究では、この文献で定式化された概念を用いた。

2. 研究の目的

本研究の新しい特色は、量子コホモロジー、フロベニウス多様体、 tt^* 構造などの異なる分野の相互理解を目指すことである。これらの分野は微分幾何学よりもシンプレクティック幾何学や特異点論といった数学の分野と深い繋がりを持つが、いくつかの目覚ましい応用により広く知られるようになった。例えば、ミラー対称性により Gromov-Witten 不変量を計算する為の微分方程式を用いた全く新しい手法が導かれた。これにより、それまで予想されていなかったある種の Calabi-Yau 軌道体の相対性が発見され、幾何学における他の様々な相対性を導くこととなった。また、Witten-Kontsevich の定理は Gromov-Witten 量と KdV ヒエラルキーの解を関連付けるが、この結果も様々な方法で一般化されてきた。これらの分野は現在も急速に発展しており、可積分系は其中で重要な役割を担っている。また微分幾何学とも各々が関連を持っているが、これらの分野同士の関係についての研究はあまり深く進展していない。本研究の目的は、これらの分野の関連

について調べることにある。主に、調和（あるいは多重調和）写像と量子コホモロジーとの関連を明らかにする。

3. 研究の方法

4. 研究成果に記述した。

4. 研究成果

報告者は興味深い非自明な現象を示す、いくつかの重要な例についての進展を得ることが出来た。論文 "The tt^* structure of the quantum cohomology of CP^1 from the viewpoint of differential geometry" (J. Dorfmeister, M. Guest, and W. Rossman, Asian J. Math. 14 (2010) 417-438) では、Cecotti-Vafa による最も簡単な例に対して、新しい (ループ群論的) アプローチを与えた。また、 n 次元複素射影空間 CP^n 及び重み付き射影空間に対する進展も挙げられる。具体的には、重み付き射影空間の量子軌道体コホモロジーと量子微分方程式との関係を論文 "Orbifold quantum D-modules associated to weighted projective spaces" (M. Guest and H. Sakai, Comm. Math. Helv. 印刷中) にて考察した。この状況下で、 tt^* 方程式は 2 次元戸田格子と関係がある (これを tt^* -戸田方程式とよぶ) が、一方リー群 $GL(n, R)$ が非コンパクトである為、 tt^* -戸田方程式に対し標準的なループ群論的アプローチを適用することは出来ない。論文 "Nonlinear PDE aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa" (M. Guest and C.-S. Lin, J. reine angew. Math., 印刷中) では、上述の方程式の、滑らかな解の族の存在を示した。これは技術的観点に於けるブレイクスルーである、すなわち、既存のループ群論的アプローチが適用できない非コンパクトの場合にも、偏微分方程式論が有用であることを示したことは大きな進展である。"Isomonodromy aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa I. Stokes data" (M. Guest, A. Its, and C.-S. Lin, arXiv:1209.2045) に於いては tt^* -戸田方程式の解の大域的な滑らかさを、付随する線形方程式のモノドロミーデータ (ストークスデータ) に関連付けることにより、また別の技術的側面に関するブレイクスルーがあった。より詳しくには、 tt^* -戸田方程式の全ての滑らかな大域解に対して、そのストークスデータを明示的に計算することが出来た。量子コホモロジーに対応するこれらの解は、全ての滑らかな解の中で、演算上強い性質をもつものと思われる。さらに、"Some tt^*

structures and their integral Stokes data" (M. Guest and C.-S. Lin, Comm. Number Theory Physics 印刷中)に於いて、各成分が整数であるようなストークス行列をもつ接続を全て得、加えてこの整数性が、次元 n が十分小さい場合には、 CP^n 及び重み付き射影空間の量子微分方程式を十分に特徴付けるものであることを示した。「カラビ-ヤウ型」の方程式に関しては多くの研究が成されているが、報告者の結果はファノ多様体に対する初めての特徴付けである。このように本研究では、偏微分方程式やモノドロミー保存変形の技術を用いることにより、非コンパクト性及び大域的困難に対する技術そのものの発展を得た。これらの技術はまた、微分幾何学に於けるその他の問題にも適用可能であると推測される。

小プロジェクトによって成果をまとめる：

(1) CP^n に対する primitive 写像、岩澤分解、量子コホモロジーの関連についての研究。量子コホモロジーは tt^* 構造を持つ、という仮説あるいは folk-theorem は量子コホモロジーに対応する多重調和写像による (大域的な) 像は対称空間 $G_1(N, R)/O(N)$ 上にある、あるいは、この多重調和写像に対応する拡張された解の像がループ群の固定された岩澤胞体上にあるという事を意味する。

Calabi-Yau 多様体の量子コホモロジーに対して、この事実はミラー対称性から知られている。というのは対応する Hodge 構造の変動 (以下 VHS) が (Griffiths transversality, Riemann-Hodge relations と呼ばれる) 性質を持つからである。しかし Fano 多様体に関して、これは非自明な予想である。というのは (conjectural) ホッジ構造は無次元だからである。本小プロジェクトの目的は CP^n の Fano 多様体に対するこの予想の微分幾何学的な証明を与えることである。

成果：論文 "Nonlinear PDE aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa" (M. Guest and C.-S. Lin, 印刷中)、"Isomonodromy aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa I. Stokes data" (M. Guest, A. Its, and C.-S. Lin, arXiv:1209.2045) でこの問題を解決した。

(2) $G_1(N, R)/O(N)$ への多重調和写像の一般論の発展と tt^* 幾何学の研究。Cecotti, Vafa の研究にあるように、多重調和写像と tt^* 幾何学との関係は Dubrovin (Geometry and integrability of topological-antitopological fusion, Comm. Math. Phys. 152 (1993)

539-564) により初めて示された。 tt^* 幾何学はスペシヤル幾何学の一般化であり、スペシ

ヤル幾何学と多重調和写像との関係は V. Cortes, L. Schaefer (Topological-antitopological fusion equations, pluriharmonic maps and special Kaehler manifolds, Prog. in Math. 234 (2005) 59-74) により研究されている。 tt^* 幾何学は VHS の一般化でもある。どちらの場合にもいわゆる等方的な多重調和写像というとても単純な形の写像が得られる。Calabi-Yau 多様体の量子コホモロジーは常にこのタイプの多重調和写像を与える。等方的な写像を拡張して、C. Hertling は特異点論における VHS の拡張としての tt^* 構造について研究している。(tt* geometry, Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities, J. Reine Angew. Math. 555 (2003) 77-161)。Fano 多様体の量子コホモロジーはこの具体例となっている。

成果： CP^1 の量子コホモロジーの tt^* 構造を "The tt^* structure of the quantum cohomology of CP^1 from the viewpoint of differential geometry" (M. Guest, J. Dorfmeister, W. Rossman, Asian J. Math. 14, 2010, 417-438) で明確した。これの一般化として C. Hertling との共同研究を始めた。

(3) tt^* 方程式のアフィン球面、あるいは他の古典的微分幾何学を用いた解釈の研究。変数の数と N が小さい場合、 $G_1(N, R)/O(N)$ への調和写像に古典的微分幾何学を用いた解釈を与えることができる。これらは平均曲率一定曲面 (sinh-Gordon 方程式) やアフィン球面 (Tzitzeica 方程式) と関連を持つ。

成果：具体的な例として、S. Okuhara (首都大学東京、博士課程) が論文 "A construction of special Lagrangian 3-folds via the generalised Weierstrass representation" (Hokkaido Math. J. 印刷中) で DPW 構成の立場から C^3 の中のスペシヤルラグランジアン錐を作った。

(4) 軌道体量子コホモロジーへの D-加群的方法の応用の研究。特に軌道体量子コホモロジーと tt^* 幾何との関係を研究するのに有用で、軌道体量子コホモロジーにより多くの多重調和写像の例が得られるであろう。

成果：論文 "Orbifold quantum D-modules associated to weighted projective spaces" (M. Guest, H. Sakai, Comm. Math. Helv. 印刷中) では、D-加群の自己随伴性と Birkhoff 分解を用いて、重み付き射影空間のある種の超曲面に関する軌道体量子 D-加群が軌道体 Gromov-Witten 不変量から誘導され

ることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 45 件)

- ① Martin Guest・Chang-Shou Lin, Nonlinear PDE aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa, *J. reine angew. Math.* 査読あり, 2012 DOI, 10.1515/crelle-2012-0057
- ② Martin Guest・Chang-Shou Lin, Some tt^* structures and their integral Stokes data, *Comm. Number Theory Phys.* 査読あり, 2012, 印刷中
- ③ K. Hashimoto・T. Sakai, Cohomogeneity one special Lagrangian submanifolds in the cotangent bundle of the sphere: *Tohoku Math.* 査読あり, *J.* 64, 2012, 141-169
- ④ H. Tokunaga, Some sections on rational elliptic surfaces and certain special conic-quartic configurations, *Kodai Math. J.* 査読あり, 35, 2012, 78-104
- ⑤ S. Kurosu, Relative nullity distributions, an affine immersion from an almost product manifold and a para-pluriharmonic isometric immersion, *Ann. Global Anal. Geom.* 査読あり, 42, 2012, 333-347
- ⑥ S. Kurosu・K. Moriya, A tt^* -bundle associated with a harmonic map from a Riemann surface into a sphere, *Differential Geom. Appl.* 査読あり, 30, 2012, 227-232
- ⑦ Y. Kamishima, Lorentzian similarity manifold, *Cent. Eur. J. Math.* 査読あり, 10, 2012, 1771-1788
- ⑧ R. Miyaoka, Moment maps of the spin action and the Cartan-Münzner polynomials of degree four, *Math. Ann.* 査読あり, 355, 2013, 1067-1084
- ⑨ R. Miyaoka, Transnormal functions on a Riemannian manifold, *Differential Geom. Appl.* 査読あり, 31, 2013, 130-139
- ⑩ R. Miyaoka, Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$, *Ann. of Math.* 査読あり, 177, 2013, 53-110
- ⑪ Y. Maeda・A. Sako, Deformation quantization of instantons on \mathbb{R}^4 , *Analysis, geometry and quantum field theory*, *Contemp. Math.* 査読あり, 584, 2012, 39-63
- ⑫ T. Kohno, Homological representations of braid groups and KZ connections, *J. Singularities.* 査読あり, 5, 2012, 94-108
- ⑬ T. Kohno, Hyperplane arrangements, local system homology and iterated integrals, *Adv. Stud. Pure Math.* 査読あり, 62, 2012, 157-174
- ⑭ H. Iriyeh・T. Sakai・H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, *Journal of Mathematical Society of Japan*, 査読あり, 印刷中
- ⑮ Y. Ohnita, Certain Lagrangian submanifolds in Hermitian symmetric spaces and Hamiltonian stability problems, *Proceedings of The Fifteenth International Workshop on Differential Geometry*, 査読なし 15, 2011, 209-234
- ⑯ Hui Ma・Yoshihiro Ohnita, Differential geometry of Lagrangian submanifolds and Hamiltonian variational problems, *Contemporary Mathematics*, 査読あり, 542, 2011, 115-134
- ⑰ S. V. Ketov・S. Kobayashi, Higher-derivative gauge interactions of Bagger-Lambert-Gustavsson theory in $N=1$ superspace, *Physical Reviews*, 査読あり D83, 2011, 1-6, DOI:10.1103/PhysRevD.83.045003
- ⑱ M. Guest, Differential equations aspects of quantum cohomology, *Geometric and Topological Methods for Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, 査読あり, 2010, 54-85
- ⑲ J. Dorfmeister・M. Guest・W. Rossman, The tt^* structure of the quantum cohomology of $\mathbb{C}P^1$ from the viewpoint of differential geometry, *Asian J. Math.* 査読あり, 14, 2010, 417-437
- ⑳ Y. Ohnita, On deformation of 3-dimensional certain minimal Legendrian submanifolds, *Proceedings of The Thirteenth International Workshop on Differential Geometry and Related Fields*, 査読なし, 13, 2009, 71-87
- ㉑ H. Ma・Y. Ohnita, On Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics and isoparametric hypersurfaces in spheres, *Math. Z.* 査読あり, 261, 2009, 749-785
- ㉒ Y. Kamishima and Omolola, Odebiyi, On the limits sets of spherical CR manifolds, *Academia Sinica, New Series*, 査読あり, 4, 2009, 189-217

- ②③ Y. Kamishima · Admi Nazra, Seifert fibred structure and rigidity on real Bott towers, *Contemp. Math*, 査読あり, 501, 2009, 103-122
- ②④ O. Ikawa · T. Sakai, · H. Tasaki, Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 査読あり, 61, 2009, 437-481
- ②⑤ Reiko Miyaoka, The Dorfmeister-Neher theorem on isoparametric hypersurfaces, *Osaka J. Math*, 査読あり, 2009, 695-715
- ②⑥ T. Kohno · F. R. Cohen · M. A. Xicotencatl, Orbit configuration spaces associated to discrete subgroups of $PSL(2, \mathbb{R})$, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 査読あり, 213, 2009, 2289-2300
- ②⑦ Sanae Kurosu, Relative nullity distributions and $(1,1)$ -geodesic affine immersions, *Results in Math*, 査読あり, 56, 2009, 259-273.
- ②⑧ 乙藤隆史 · マーティン · ゲスト, 日本評論社, 深谷賢治 (編) ミラー対称性入門, 2009, 109-120
- [学会発表] (計 92 件)
- ① 2012/10/20, Martin Guest, Toda equations, meromorphic connections, and harmonic maps, Workshop on Integrable Systems and Geometric PDEs, National Taiwan University, Taiwan
- ② 2012/4/24, Martin Guest, Global solutions of the tt^* -equations and their integral Stokes data, FI Oberwolfach, Singularity Theory and Integrable Systems, Germany
- ③ 2012/4/5, Martin Guest, Harmonic maps, Frobenius manifolds, and TERPS, University of California Irvine, Geometry Seminar, USA
- ④ 2012/3/18, 酒井高司, Lagrangian Floer homology and its application to Hamiltonian volume minimizing property, The 4th TMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 国立台湾大学
- ⑤ 2012/3/12, Martin Guest, The tt^* -Toda equations, University of Quebec at Montreal, CIRGET Seminar, Canada
- ⑥ 2011/11/1, Martin Guest, Integrable systems and quantum cohomology, University of Guanajuato, Mexico, Colloquium
- ⑦ 2011/10/31, Martin Guest, The tt^* -Toda equations, CINVESTAV, Mexico City, 50 Years of Mathematics at CINVESTAV
- ⑧ 2011/7/27, Martin Guest, The tt^* -Toda equations, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, 11th National Conference on Integrable Systems
- ⑨ 2011/7/2, 赤穂まなぶ, 境界付き多様体のモース理論, 香川セミナー, 香川大学
- ⑩ 2011/6/20, 酒井高司, 球面の余接束内の余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体, 理工学部数学科談話会, 東京理科大学
- ⑪ 2011/6/3, Martin Guest, The tt^* -Toda equations, Taiwan National University, Workshop on Isomonodromy Theory
- ⑫ 2011/4/28, Martin Guest, Orbifold quantum cohomology, hypergeometric equations, and integrable systems Academia Sinica, Taiwan, Colloquium
- ⑬ 2010/9/10, Martin Guest, From quantum cohomology to integrable systems, ETH Zurich
- ⑭ 2010/7/12, Martin Guest, Some new solutions of the tt^* equations, IPMU, Tokyo. DMM Seminar
- ⑮ 2010/6/22, Martin Guest, New life for an old lattice, University of Durham, Conference on Geometry and Topology in honour of John, Bolton and Cherry Kearton
- ⑯ 2010/5/4, Martin Guest, tt^* -geometry, MFI Oberwolfach, Progress on Surface Theory
- ⑰ 2010/4/16, Martin Guest, Quantum cohomology and integrable systems I, National Taiwan University. TMS seminar
- ⑱ 2010/3/21, 酒井高司, Tight Lagrangian submanifolds in some homogeneous Kähler manifolds, TMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, National Taiwan University
- ⑲ 2010/3/10.11, Martin Guest, From integrable systems to quantum cohomology, Tohoku University GCOE Spring School
- ⑳ 2009/12/12, Martin Guest, Some CMC surfaces with Maple and 3D-XplorMath, Kyoto University GCOE Seminar - Mathematical Research with Computers
- ㉑ 2009/9/17, Martin Guest, The mysterious Toda lattice, National Cheng Kung University, Taiwan. Colloquium

- ② 2009/9/10, Martin Guest, Introduction to the Toda lattice I, II, National Taiwan University. Geometry seminar
- ③ 2009/7/6, Martin Guest, Orbifold quantum cohomology, 1st PRIMA Congress. University of New South Wales

[図書] (計 2 件)

- ① Sergey Ketov, InTech Open Access Publishers, Advances in Quantum Field Theory, 2012, 230
- ② 中村 憲, 朝倉書店, 数論アルゴリズムシリーズ [開かれた数学] 第 2 巻, 2009, 181

[その他]

ホームページ等

<http://www.f.waseda.jp/martin/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

ゲスト マーティン (GUEST MARTIN)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 10295470

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

神島 芳宣 (KAMISHIMA YOSHINOBU)
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号: 10125304
徳永 浩雄 (TOKUNAGA HIROO)
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号: 30211395
前田 吉昭 (MAEDA YOSHIAKI)
慶應大学・理工学部・教授
研究者番号: 40101076
宮岡 礼子 (MIYAOKA REIKO)
東北大学・理学研究科・教授
研究者番号: 70108182
河野 俊丈 (KOHNO TOSHITAKE)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号: 80144111
大仁田 義裕 (OHNITA YOSHIHIRO)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 90183764
酒井 高司 (SAKAI TAKASHI)
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号: 30381445
Sergei V. Ketov (SERGEI V KETOV)
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号: 70347269

赤穂 まなぶ (AKAHO MANABU)
首都大学東京・理工学研究科・助教
研究者番号: 30332935
乙藤 隆史 (OTOFUJI TAKASHI)
日本大学・工学部・講師
研究者番号: 70339266
小林 真平 (KOBAYASHI SHINPEI)
弘前大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号: 40408654
黒須 早苗 (KUROSU SANAE)
東京理科大学・理学部・助教
研究者番号: 70457844