

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2009～2013

課題番号：21244008

研究課題名(和文)シュレディンガー方程式のスペクトル・散乱理論の研究

研究課題名(英文)Spectral and scattering theory of Schrodinger equations

研究代表者

中村 周 (NAKAMURA, Shu)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：50183520

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 33,700,000円、(間接経費) 10,110,000円

研究成果の概要(和文)：シュレディンガー方程式のスペクトル理論、散乱理論、また偏微分方程式としての解の構造について、関数解析、超局所解析、実解析、確率論などの手法を用いて研究を行い、1.シュレディンガー方程式の解の超局所特異性、2.多様体上のシュレディンガー方程式のスペクトル・散乱理論、3.電磁場中の多体粒子の散乱理論、4.シュレディンガー方程式の半古典極限、5.ランダムシュレディンガー作用素と電荷輸送の理論、等を含む研究成果を得た。研究成果は、現在も継続中のものを除いて、現時点までに39編の論文として出版された(印刷中を含む)。

研究成果の概要(英文)：We have investigated the spectral theory, scattering theory and the structure of solutions for Schrodinger equations, using the functional analysis, microlocal analysis, real analysis and probability theory methods. The research results include results on: 1. Microlocal singularities for solutions of Schrodinger equations, 2. Scattering theory for Schrodinger operators on manifolds, 3. Scattering theory for multi-particles in electric/magnetic fields, 4. Semiclassical analysis for Schrodinger equations, 5. Random Schrodinger equations and charge transport. These results are published as 39 publications (including in press, at present), and several projects are still in progress.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：シュレディンガー方程式 スペクトル理論 散乱理論 半古典極限 ランダム作用素 解の超局所の特異性

## 1. 研究開始当初の背景

シュレディンガー方程式の数学的構造の研究は、1930年代のフォン・ノイマンの先駆的研究、1940年代の加藤敏夫の開拓した関数解析的手法に遡る、長い歴史を持つ高度に発達した研究分野である。一方、量子力学という全ての物理現象の基礎方程式であるだけに、シュレディンガー方程式の数学的構造は広く深い研究分野であり、また多くの関連分野と連携して発展しつつある分野でもある。特に1980年代からは、偏微分方程式における超局所解析の手法や、確率論的な視点からの物性理論の問題の研究などが盛んになり、量子カオスの研究などにも結びついて研究が発展しつつある。

## 2. 研究の目的

シュレディンガー方程式の数学的構造、特にスペクトルや散乱理論、解の特異性などの偏微分方程式的な構造の研究の広い範囲を研究対象としている。具体的には、以下のような課題を研究するのが目的である：

- ・ シュレディンガー方程式の解の特異性の研究
- ・ 多様体上のシュレディンガー方程式のスペクトル・散乱理論
- ・ 電磁場中の多体粒子の散乱理論
- ・ シュレディンガー方程式の半古典極限
- ・ ランダム・シュレディンガー作用素と電荷輸送の理論

その他にも、研究の進行に応じて、適宜シュレディンガー方程式の構造、それに関連する数学的理論に関する研究を積極的に開拓して行く計画である。

## 3. 研究の方法

数学の研究計画においては、大規模な装置などは必要でなく、また研究の進行に於いては、新たなアイデアの開拓が本質的に重要である。したがって、研究費の使途としては、一般的な研究環境の整備から出発して、関連研究者の招聘、研究発表のための国内外の出張、研究会の開催などが大半を占める。各年度に平均して8件程度の海外出張旅費の支出、8件程度の外国人研究者の招聘、2件前後の国際研究集会を開催し、そのほかにも各年度1件程度の若手研究者のためのスクール形式の研究会、また関連研究会の国内旅費、海外研究者招へいの補助などを行った。

## 4. 研究成果

研究目的の項の内容に沿って、5.の発表論文を引用して研究成果の概要について説明する。

- ・ シュレディンガー方程式の解の特異性

(論文 1. 2. 4. 5. 6. 9. 10. 17.) シュレディンガー方程式は、特異性に関して無限大の伝播速度を持ち、波動方程式のような古典的偏微分方程式に類似の(超局所的)特異性の伝播定理を得ることは出来ない。それは、高エネルギーにおいては対応する粒子の運動が高速になり、長時間の運動をすることと等価である、という点に着目して、古典力学の散乱理論の手法を用いて、シュレディンガー方程式の解の特異性を決定する事が出来ることを示した。

論文 1. においては、ユークリッド空間上の短距離摂動を持つ場合に基礎的手法を確立し、論文 2. においては、それを長距離型摂動の場合に(長距離型散乱理論で用いられるフーリエ積分作用素を用いた変型子の手法を組み合わせる)拡張した。また、論文 17. においては、特に弱い長距離型の摂動に関しては、変型子を具体的に書き下し、精密な記述が可能であることを示した。

論文 5. 9. においては、上記の特異性の特徴付けが、解析的特異性に関しても可能であることを、Sjöstrand の超局所的解析性の理論と組み合わせて明らかにした。

一方、散乱多様体と呼ばれる漸近的に錐状の構造を持つリーマン多様体上のシュレディンガー方程式についても、解の特異性の特徴付けが可能であることを、論文 6. において証明した。

さらに論文 10. においては、これらの理論で構築した理論を精密化して、変数係数のシュレディンガー方程式の基本解の構成を与えた。

更に別のモデルとして、摂動された調和振動子についても、同様に散乱理論を用いて特異性の伝播が記述できることを、論文 4. では論じた。

多様体上のシュレディンガー方程式のスペクトル・散乱理論(論文 7. 15.) 散乱多様体と呼ばれる、漸近的に錐状の構造をもつリーマン多様体においては、定常的な散乱理論が構成できることを R. Melrose らが示し、その上に(特殊な)超局所解析の理論が構築されている。これは、通常の散乱理論と大きく異なる手法を用いているが、実は通常の、時間発展から導かれる散乱理論が散乱多様体上で構成され、自然に、しかもより簡明に Melrose らの理論が拡張されることを示した。

論文 7. においては、散乱多様体上の基本的な散乱理論の枠組みを、関数解析の手法を用いて構築し、漸近完全性、散乱行列の構成を行った。

論文 15. においては、上掲論文の枠組みの上で Hörmander 流の(通常の)超局所解析を用いて、散乱行列がフーリエ積分

作用素であるという Melrose-Zworski の定理の拡張を証明した。

電磁場中の多体粒子の散乱理論 (論文 29. 30. 31. 32. 33)

量子力学的な多体粒子のスペクトル、散乱理論はそれ自体高度な理論であるが、外的な電場、磁場がある場合には、更に未開拓な分野である。論文 29. 31. においては、時間に依存する電場中の多体粒子の散乱理論を構築した。

論文 32. においては、外的な電場、磁場の両方がある場合のシュレディンガー方程式の構造を研究した。

論文 30. 33 においては、時間に依存する電場中の粒子に関する散乱逆問題を考察している。

シュレディンガー方程式の半古典極限 (論文 16. 34. 35. 36. 37. 38. 39.)

シュレディンガー方程式と対応する古典力学系のあいだの関係は、量子力学の数学的理論において基礎的な重要性があり、多くの研究がなされているのみならず、上記の項目 においても、半古典極限の手法が本質的に用いられている。論文 34. ~39. においては、古典力学系が双曲的な停留点を持つようないくつかの場合について、量子力学的共鳴、散乱振幅、超局所解の伝播、などについての解析を行っている。

また、論文 16. においては、散乱行列のスペクトルと量子力学的共鳴のあいだの関係について解析をしている。具体的には、量子力学的共鳴の近くで、半古典極限において、散乱行列の固有値は(ひとつだけ) 1 回転することが示された。

ランダム・シュレディンガー作用素と電荷輸送の理論 (論文 3. 8. 11. 12. 13. 19. 27. 28.)

ランダム・シュレディンガー作用素については膨大な研究成果があるが、ランダムな摂動が単調(低符号)でない場合については、極めて限られた解析しか出来ていない。論文 3. 8. においては、ユークリッド空間上の非定符号の局所ポテンシャルを持つアンダーソン・モデルについて初めてリフシッツ特異性を証明し、それをを用いていくつかの場合にアンダーソン局在を導いた。また、論文 11. 13. においては、異なる非定符号摂動のモデルであるランダム・ディスプレイスメント・モデルについてリフシッツ特異性、ウェグナー評価を証明し、アンダーソン局在を導いた。

論文 12. においては、いくつかのランダム・モデルについて、(特定の領域で)状態密度が解析的であることを証明した。

論文 27. 28. においては、現在ランダム・シュレディンガー作用素の研究の中心的な話題となっている、固有値の間隔

統計について、ランダム・ポテンシャルが漸近的に減衰する場合、ガウシアン・ベータ統計に従う場合、それぞれについて解析している。

その他の話題(論文 14. 18. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26.)

論文 14. 18. は、シュレディンガー作用素の散乱理論に関わる研究成果である。論文 14. においては、物性理論で用いられる電荷欠乏(charge deficiency)が収束することを厳密に証明し、散乱理論のスペクトル・シフト関数と同等であることを示した。論文 18. においては、特異性を持つ長距離型の摂動について、ムーレの理論が簡明に適用できることを、離散作用素の発想を用いて明らかにした。論文 20. ~26. は、量子力学と関係のある、タイリングの理論についての研究成果である。

## 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 39 件)

- 1 Nakamura, S.: Wave front set for solutions to Schrödinger equations. *J. Functional Analysis* **256**, 1299-1309 (2009).  
DOI:10.1016/j.jfa.2008.06.007
- 2 Nakamura, S.: Semiclassical singularity propagation property for Schrödinger equations. *J. Math. Soc. Japan* **61** (1), 177-211 (2009).  
DOI:10.2969/jmsj/06110177
- 3 Klopp, F., Nakamura, S.: Spectral extrema and Lifshitz tails for non monotonous alloy type models. *Commun. Math. Phys.* **287**, 1133-1143 (2009).  
DOI: 10.1007/s00220-008-0666-3
- 4 Mao, S., Nakamura, S.: Wave front set for solutions to perturbed harmonic oscillators. *Comm. Partial Differential Equations* **34** (5), 506-519 (2009).  
DOI: 10.1080/03605300902768891
- 5 Martinez, A., Nakamura, S., Sordoni, V.: Analytic wave front for solutions to Schrödinger equation, *Advances in Math.* **222**, 1277-1307 (2009).  
DOI:10.1016/j.aim.2009.06.002
- 6 Ito, K., Nakamura, S.: Singularities of solutions to Schrödinger equation on scattering manifold. *American J. Math.* **131** (6), 1835-1865 (2009).  
[http://muse.jhu.edu/journals/american\\_journal\\_of\\_mathematics/v131/131.6.ito.html](http://muse.jhu.edu/journals/american_journal_of_mathematics/v131/131.6.ito.html)
- 7 Ito, K., Nakamura, S.: Time-dependent scattering theory for Schrödinger

- operators on scattering manifolds. *J. London Math. Soc.* **81**, 774-792 (2010). DOI: 10.1112/jlms/jdq018
- 8 Klopp, F., Nakamura, S.: Lifshitz tails for generalized alloy type random Schrödinger operators. *Analysis and PDE* **3-4**, 409-426 (2010). DOI: 10.2140/apde.2010.3.409
- 9 Martinez, A., Nakamura, S., Sordani, V.: Analytic wave front set for solutions to Schrödinger equations II - Long range perturbations. *Comm. Partial Differential Equations* **35**, 2279-2309 (2010) DOI:10.1080/03605302.2010.523918
- 10 Ito, K., Nakamura, S.: Remarks on the fundamental solution to Schrödinger equation with variable coefficients. *Ann. Inst. Fourier* **62**, 1091-1121 (2012). [http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2012\\_62\\_3\\_1091\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2012_62_3_1091_0)
- 11 Klopp, F., Loss, M., Nakamura, S., Stolz, G.: Localization for the random displacement model. *Duke Math. J.* **161**, No.4, 587-621 (2012). DOI:10.1215/00127094-1548353
- 12 Kaminaga, M., Krishna, M., Nakamura, S.: A note on the analyticity of density of states. *J. Stat. Phys.* **149**, 496-504 (2012). DOI:10.1007/s10955-012-0603-x
- 13 Klopp, F., Loss, M., Nakamura, S., Stolz, G.: Understanding the random displacement model: From ground-state properties to localization. *Operator Theory: Advances and Applications* **224** (2012), 183-219. DOI:10.1007/978-3-0348-0414-1\_10
- 14 Kohmoto, M., Koma, T., Nakamura, S.: The spectral shift function and the Friedel sum rule. *Ann. H. Poincaré* **14** (2013), 1413-1424. DOI:10.1007/s00023-012-0219-3
- 15 Ito, K., Nakamura, S.: Microlocal properties of scattering matrices for Schrödinger equations on scattering manifolds. *Analysis and PDE* **6** (2013), No. 2, 257-286. DOI: 10.2140/apde.2013.6.257
- 16 Nakamura, S., Pushnitski, A.: The spectrum of the scattering matrix near resonant energies in the semiclassical limit. *Trans. American Math. Soc.* **366** (2014), 1725-1747. DOI:10.1090/S0002-9947-2013-06077-1
- 17 Horie, K., Nakamura, S.: Propagation of singularities for Schrödinger equations with modestly long range type potentials. *Publ. RIMS.* (印刷中)
- <http://arxiv.org/abs/1202.4702>
- 18 Nakamura, S.: A Remark on the Mourre theory for two body Schrödinger operators. *J. Spectral Theory.* (印刷中) <http://arxiv.org/abs/1305.4716>
- 19 Nakano, F.: Infinite divisibility of random measures associated to some random Schrödinger operators. *Osaka J. Math.* **46** (2009), no. 3, 845-862. <http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1256564209>
- 20 Nakano, F., Sadahiro, T.: A bijection theorem for domino tilings with diagonal impurities. *J. Stat. Phys.* **139** (2010), no. 4, 565-597. DOI:10.1007/s10955-010-9954-3
- 21 Nakano, F., Ono, H., Sadahiro, T.: Local move connectedness of domino tilings with diagonal impurities. *Discrete Math.* **310** (2010), no. 13-14, 1918-1931. DOI:10.1016/j.disc.2010.02.015
- 22 Hayashi, H., Kawachi, Y., Komatsu, K., Konda, A., Kurozoe, M., Nakano, F., Odawara, N., Onda, R., Sugio, A., Yamauchi, M.: Notes on vertex atlas of Danzer tiling. *Nihonkai Math. J.* **22** (2011), no. 1, 49-58. <http://projecteuclid.org/euclid.nihmj/1339694050>
- 23 Nakano, F., Sadahiro, T.: Domino tilings with one diagonal impurity. *Fund. Inform.* **117** (2012), no. 1-4, 249-264. DOI:10.3233/FI-2012-699
- 24 Nakano, F., Sadahiro, T.: A ( - )-expansion associated to Sturmian sequences. *Integers* **12** (2012), no. 4, 571-599. DOI: 10.1515/integers-2011-0123
- 25 Nakano, F., Sadahiro, T.: Hitting matrix and domino tiling with diagonal impurities. *J. Stat. Phys.* **151** (2013), no. 6, 1035-1055. DOI: 10.1007/s10955-013-0744-6
- 26 Nakano, F., Sadahiro, T.: A generalization of carries processes and Eulerian numbers. *Adv. in Appl. Math.* **53** (2014), 28-43. DOI:10.1016/j.aam.2013.09.005
- 27 S. Kotani and F. Nakano: Level statistics for the one-dimensional Schrödinger operators with random decaying potential, *Festschrift Masatoshi Fukushima, in honor of Masatoshi Fukushima's Sanju, World Scientific* (印刷中) <http://jp.arxiv.org/abs/1210.4224>
- 28 F. Nakano: Level statistics for one-dimensional Schrödinger operators

- and Gaussian beta ensemble, *J. Stat. Phys.* (印刷中)  
<http://jp.arxiv.org/abs/1312.6901>
- 29 Adachi, T., Kimura, T., Shimizu, Y.: Scattering theory for two-body quantum systems with singular potentials in a time-periodic electric field. *J. Math. Phys.* **51** (2010), no. 3, 032103, 23 pp  
 DOI:10.1063/1.3317902
- 30 Adachi, T., Kamada, T., Kazuno, M., Toratani, K.: On multidimensional inverse scattering in an external electric field asymptotically zero in time. *Inverse Problems* **27** (2011), no. 6, 065006, 17 pp.  
 DOI:10.1088/0266-5611/27/6/065006
- 31 Adachi, T., Ishida, A.: Scattering in an external electric field asymptotically constant in time. *J. Math. Phys.* **52** (2011), no. 6, 062101, 15 pp.  
 DOI:10.1063/1.3592600
- 32 Adachi, T., Kawamoto, M.: Avron-Herbst type formula in crossed constant magnetic and time-dependent electric fields. *Lett. Math. Phys.* **102** (2012), no. 1, 65-90.  
 DOI:10.1007/s11005-012-0555-8
- 33 Adachi, T., Fujiwara, Y., Ishida, A.: On multidimensional inverse scattering in time-dependent electric fields. *Inverse Problems* **29** (2013), no. 8, 085012, 24 pp.  
 DOI:10.1088/0266-5611/29/8/085012
- 34 Bony, J.F., Fujiie, S., Ramond, T., Zerzeri, M.: Propagation of microlocal solutions through a hyperbolic fixed point. *Differential equations and exact WKB analysis*, 1-32, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, **B10**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B10/pdf/B10-01.pdf>
- 35 Fujiie, S., Lasser, C., Nédélec, L.: Semiclassical resonances for a two-level Schrödinger operator with a conical intersection. *Asymptot. Anal.* **65** (2009), no. 1-2, 17-58.  
 DOI:10.3233/ASY-2009-0946
- 36 Fujiie, S., Lahmar-Benbernou, A., Martinez, A.: Width of shape resonances for non globally analytic potentials. *J. Math. Soc. Japan* **63** (2011), no. 1, 1-78.  
 DOI:10.2969/jmsj/06310001
- 37 Bony, J.F., Fujiie, S., Ramond, T., Zerzeri, M.: Spectral projection, residue of the scattering amplitude and Schrödinger group expansion for barrier-top resonances. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **61** (2011), no. 4, 1351-1406  
 DOI:10.5802/aif.2643
- 38 Bony, J.F., Fujiie, S., Ramond, T., Zerzeri, M.: "WKB solutions near an unstable equilibrium" *Nonlinear Physical Systems: Spectral Analysis, Stability and Bifurcations*, Wiley, 15-39  
 DOI:10.1002/9781118577608.ch2
- 39 Bony, J.F., Fujiie, S., Ramond, T., Zerzeri, M.: "Width of resonances created by homoclinic orbits - isotropic fixed point case - RIMS Kōkyūroku Bessatsu **B45** p.31-43 (2014)  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/B45-contents.pdf>
- [学会発表](計 60 件)
- 1 中村周「シュレディンガー方程式の超局所特異性の解析と散乱理論」2011年9月29日(日本数学会・秋季総合分科会・関数方程式論分科会特別講演)
- 2 Nakamura, S.: "Microlocal properties of scattering matrices for Schrödinger operators on manifolds", July 6, 2012. ("The fourth Birman Conference", July 2 - 6, 2012, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia)
- 3 Nakamura, S.: "Microlocal singularities and scattering theory for Schrödinger equations on manifold", August 3, 2012. (Plenary talk, "International Congress on Mathematical Physics 2012", August 6-11, 2012, Aalborg, Denmark)
- 4 Nakamura, S.: "Applications of phase space analysis to scattering theory for discrete Schrödinger operators", September 26, 2013, CIRM, Marseille, France. (Conference "Microlocal Analysis and Spectral Theory" in the honor of Johannes Sjöstrand. September 23-27, 2013).
- 5 Nakano, F.: "A remark on the discrete Schrödinger operators with random vector potential", Random Schrödinger Operators 31 May - 4 June 2010 at the Centre Interfacultaire Bernoulli at the EPFL in Lausanne, Switzerland.
- 6 Nakano, F.: "Distribution of eigenfunctions in the Anderson model", Journées Mathématiques de Kairouan, Tunisia, 2010, Nov.4-6.
- 7 足立匡義「時間周期的に変動する電場中の量子力学系に対する散乱理論」, 日本数学会函数方程式論分科会特別講演, 2009.9.25, 大阪大学.

8 Fujiié, S.: “Semi-classical resonances associated with unstable equilibria” Spectral Analysis, Stability and Bifurcation in Modern Nonlinear Physical Systems, Banff, 2012/11/05

(他 52 件については紙数の関係で省略)

〔図書〕(計 1 件)

中村周「量子力学のスペクトル理論」共立出版、2012.

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村 周 (NAKAMURA, Shu)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：50183520

### (2) 研究分担者

足立 匡義 (ADACHI, Tadayoshi)  
神戸大学・理学研究科・教授  
研究者番号：30281158

中野 史彦 (NAKAN0, Fumihiko)  
学習院大学・理学部・教授  
研究者番号：10291246

藤家 雪朗 (FUJIIÉ, Setsuro)  
立命館大学・理工学部・教授  
研究者番号：00238536

### (3) 連携研究者

田村英男 (TAMURA, Hideo)  
岡山大学・理学部・名誉教授

研究者番号：30022734

谷島賢二 (YAJIMA, Kenji)  
学習院大学・理学部・教授  
研究者番号：80011758

磯崎洋 (ISOZAKI, Hiroshi)  
筑波大学・数理物質科学研究科・教授  
研究者番号：90111913

岩塚明 (IWATSUKA, Akira)  
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授  
研究者番号：40184890

南 就将 (MINAMI, Nariyuki)  
慶應義塾大学・医学部・教授  
研究者番号：10183964

上木 直昌 (UEKI, Naomasa)  
京都大学・人間・環境学研究科(研究院)・教授  
研究者番号：80211069

野村 祐司 (NOMURA, Yuji)  
愛媛大学・大学院・理工学研究科・准教授  
研究者番号：40282818

土居 伸一 (DOI, Shin-ichi)  
大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授  
研究者番号：00243006

楯 辰哉 (TATE, Tatsuya)  
名古屋大学・大学院・多元数理科学研究科・准教授  
研究者番号：00317299

峯 拓矢 (MINE, Takuya)  
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・准教授  
研究者番号：90378597

伊藤 健一 (ITO, Kenichi)  
神戸大学・理学研究科・准教授  
研究者番号：90512509