

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月23日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21340001

研究課題名（和文） 超平面配置の諸相

研究課題名（英文） Various aspects of hyperplane arrangements

研究代表者

寺尾 宏明（TERAO HIROAKI）

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：90119058

研究成果の概要（和文）：超平面配置は（群や環がそうであるように）単純な定義をもつが、決して簡単な対象ではない。初年度に、超平面配置に関するさまざまな視点を広く理解し、統合する立場に立つために、専門や世代を横断する研究組織を構築しえたのは大きな成果であった。結果として、組合せ論・代数幾何学・群論・リー環論・統計学などの多様な観点からの研究を行い、それらの相互関連を描出することに成功した。最も特筆すべきは、我々により22年度に発見され、今も発展し続けるワイル配置とベルヌーイ多項式との関連であろう。

研究成果の概要（英文）：The definition of hyperplane arrangements is, like groups and rings, deceptively simple but they are not simplistic objects. In the first year of this research project, we successfully constructed a research network encompassing specialties and generations in order to understand diversified viewpoints of hyperplane arrangements in a wide spectrum and to hold a commanding position for advancing the research. Consequently, we studied the subject from various viewpoints including combinatorics, algebraic geometry, group theory, Lie algebra theory and statistics and described their mutual relations. The most conspicuous example is the relationship between the Weyl arrangements and the Bernoulli polynomials, which was discovered by us in 2010. It has been scrutinized and expected to develop further.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	5,800,000	1,740,000	7,540,000
2010年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2011年度	2,900,000	870,000	3,770,000
年度			
年度			
総計	11,500,000	5,190,000	14,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的組合せ論・超平面配置

## 1. 研究開始当初の背景

超平面配置の歴史は有史以前に遡る。たとえば、数直線上の有限個の点は最も簡単な例である。無限直線上から  $m$  個の点を取り除けば、それらの点によって直線は  $(m+1)$  個の“部分”に分割されるが、そのうち無限の長さを持つものは両端の2つの“部分”であり、残りの  $(m-1)$  個の“部分”は有限の長さを持つ“部分”である。有限の“部分”が  $m$  個ではなく  $(m-1)$  個になることは「植木算の原理」として日本では昔からよく知られている。これは小学校レベルの算数であるが、超平面配置の理論のひとつの発端である。この「植木算の原理」は 1975 年に米国数学会メモワールとして出版された T. Zaslavsky 著 Facing up to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes.” Memoirs Amer. Math. Soc. 154, 1975 において、現代枠組の中で高次元に拡張された。その際に主役を演じたのは現代組合せ論の主たる道具のひとつであるメビウス関数であった。後に、この Zaslavsky の公式は位相幾何学、リー環論、代数幾何学、群論などの多くの分野の視点からの解釈をもつようになる。この成功例が示すように超平面配置という場において数学の諸分野が出会い、相互の関連が完全に明らかになるのが理想だが、その理想に向けてのプログラムは 2009 年度の初頭の時点ではまだ不十分であり、本研究によってプログラムのあるべき姿を探り、新たな具体的相互関連がひとつでも多く明らかになることが待たれていた。

## 2. 研究の目的

「1. 研究開始当初の背景」に述べたような方向を目指しての研究目的を具体的に述べると、以下の2点に集約される。

- (1) 多重超平面配置、特に、重複度をもつ Coxeter 配置をさまざまな角度から研究し、その性質を明らかにする。また、その過程で対称群を含む重要な有限群のクラスである Coxeter 群の隠れた性質がその多重超平面配置にどのように反映されているかを示す。
- (2) 統計学(特にランキング)・経済学(特に社会選択論)の超平面配置を用いたモデルを構成し、主に組合せ論と有限群と計算機を用いて、その数学的解析を行い、数学的に有意義な結果を導くとともに、統計学・経済学への応用を目指す。

## 3. 研究の方法

初年度の 21 年度に行われた第 2 回日本数学会季期研究所 (MSJ-SI) “Arrangements of

Hyperplanes” (札幌, 2009 年 8 月 1 日～13 日, 組織委員長: 寺尾宏明) のために約 200 名の参加者が札幌に集まった機会を利用して、国内外の参加者の研究分野の近さや親和性を考慮して戦略的に多くの研究打合せの機会を提供することによって、研究ネットワークを構築することに専念した。これにより 22 年度以降の全国的な研究体制が整うとともに、新たに海外の有力研究者と研究交流の絆をもつことができた国内の若手研究者も多かった。

22 年度以降は、阿部拓郎 (京大・工)、竹村彰通 (東大・情報理工)、紙屋英彦 (名大・経)、吉永正彦 (京大・理) など定期的に研究打合せを行った。その際、竹村・紙屋との共同研究においては計算機の助けを受けた。また、超平面配置の大御所のひとりである Louis Solomon (ウィスコンシン大) とは、阿部を交えて、米国において研究打合せを行った。Solomon 教授はすでに高齢ではあるが、驚異的な記憶力と透徹した洞察力は健在であり、大局の見地から今後の研究の進むべき方向に関するアドバイスは本研究にとって有益であった。

また、現在、大学院生の陶山大輔 (北大・理, 学振特別研究員 DC2) は、後述の A 型の Shi 配置に関する興味ある計算を遂行し、優れた修士論文を執筆し、研究者としてよいスタートを切った。陶山の計算力は本研究の後半においては、研究遂行に資するところが大きかった。

## 4. 研究成果

上述「2. 研究目的」の (1) と (2) に応じて、重要な研究成果を短く解説しよう。

### (1) 多重超平面配置、特に、多重 Coxeter 配置の研究

- ・ [雑誌論文]②においては、対数微分型式全体に(負を含む)すべての整数でパラメトライズされたフィルター付きを与えた。
- ・ [雑誌論文]⑧においては、群同変な重複度をもつ多重 Coxeter 配置について、それらの自由性を証明した。
- ・ [雑誌論文]⑥においては、2つの軌道をもつ Weyl 配置について Shi-Catalan 配置という新たな配置を定義して、その自由性を証明した。
- ・ [雑誌論文]⑨においては、A 型の Shi 配置の微分加群の基底を、(この種の配置に対しては世界で初めて)具体的に構成した。さらに興味深いのは、ここにベルヌーイ多項式が本質的に登場したことであり、今後の展開と発展が期待される。

(2) 統計学(特にランキング)と関連する超平面配置の研究

- ・ [雑誌論文]③においては、今まで研究が進んでいなかったが応用上は整数上の超平面配置について、周期性を初めて見出した。
- ・ [雑誌論文]⑤  
選好のランキングの問題について、1次元モデルについての先行研究(Hidehiko Kamiya, Peter Orlik, Akimichi Takemura, Hiroaki Terao, Arrangements and ranking patterns, *Annals of Combinatorics*, **10** (2006), 219-235)の結果を参考に、余次元1の場合に対応する結果を得た。
- ・ [図書]③  
[雑誌論文]⑤の中で未解決問題として提出された問題を自ら解いた。その際、Coxeter配置を含み、かつ、対応するCoxeter群で全体として不変になるような超平面配置の部屋数についての定理を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

①Daisuke Suyama, Hiroaki Terao, The Shi arrangements and the Bernoulli polynomials, *Bull. London Math. Soc.*, 査読有, 掲載確定

②Takuro Abe, Hiroaki Terao, Atsushi Wakamiko, Equivariant multiplicities of Coxeter arrangements and invariant bases, *Advances in Math.*, 査読有, **230** (2012), 2364-2377

③Ruimei Gao, Donghe Pei, Hiroaki Terao, The Shi arrangement of the type  $D_{2k+1}$ , *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 査読有, **88** (2012), 41-45

④Takuro Abe, Hiroaki Terao, The freeness of Shi-Catalan arrangements, *European J. Combin.*, 査読有, **32** (2011), 1191-1198

⑤Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura, Hiroaki Terao, Ranking patterns of unfolding models of codimension one, *Advances in Applied Mathematics*, 査読有, 2011, **47** (2011), 379-400

⑥Takuro Abe, Hiroaki Terao, Primitive filtrations of the modules of invariant logarithmic forms of Coxeter arrangements, *Journal of Algebra*, 査読有, **330** (2011), 251-262

⑦Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura, Hiroaki Terao, Periodicity of non-central integral arrangements modulo positive integers, *Annals of Combinatorics*, 査読有, **15** (2011), 449-464

⑧Takuro Abe, Hiroaki Terao, A primitive derivation and logarithmic differential forms of Coxeter arrangements, *Math. Z.*, 査読有, **264** (2010), 813-828

⑨Takuro Abe, Hiroaki Terao, Masahiko Yoshinaga, Totally free arrangements of hyperplanes, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 査読有, **137** (2009), 1405-1410

[学会発表] (計6件)

①陶山大輔, 寺尾宏明, Primitive derivations, Shi arrangements and Bernoulli polynomials, (招待講演)the Special Session on "Singularities, Stratifications and their Applications" at an AMS Sectional Meeting, 2012/3/3, University of Hawaii at Manoa(USA)

②寺尾宏明, Simple bases for the logarithmic derivation modules of the generalized Shi arrangements, (招待講演)"Topics in the Theory of Weyl Groups and Root Systems(Sekiguchi 60)", 2011/9/20, 東京大学(東京都)

③寺尾宏明, The Shi arrangements and the Bernoulli numbers, (招待講演)the Special Session on "The Algebraic Geometry and Topology of Hyperplane Arrangements" at an AMS Sectional Meeting, 2011/4/9, College of the Holy Cross(USA)

④寺尾宏明, Combinatorial and algebro-geometric properties of free arrangements, (招待講演)Workshop on "Algebra and Geometry of Configuration Spaces and related structures", 2010/6/22, Centro di ricerca matematica Ennio De Giorgi(Italy)

⑤寺尾宏明, 超平面配置の数学 (日本数学会代数学賞受賞特別講演), (招待講演)日本数学会 2010 年度年会, 2010/3/26, 慶応大学 (東京都)

⑥寺尾宏明, Mathematics related to hyperplane arrangements, (招待講演)Geometry of singularities and related topics, 2010/3/13, 東京理科大学 (東京都)

[図書] (計 3 件)

① Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura, Hiroaki Terao, Arrangements stable under the Coxeter groups, in: *Configuration Spaces: Geometry, Topology and Combinatorics*, "Proceedings of a special period at the De Giorgi Center, Scuola Normale in Pisa, May - June, 2010, (ed. A. Bjorner, F. Cohen, C. De Concini, C. Procesi, M. Salvetti), Edizioni della Normale, Pisa, 掲載確定

②(ed.) Hiroaki Terao, Sergey Yuzvinsky, Arrangements of Hyperplanes - Sapporo, 2009, (pp.570) *Advanced Studies in Pure Math.*, **62**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, March 2012

③ Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura, Hiroaki Terao, The characteristic quasi-polynomials of the arrangements of root systems and mid-hyperplane arrangements, in: *Progress in Math.* **283**, "Arrangements, local systems and singularities," *Lecture Notes of a 2007 CIMP Summer School held at Galatasaray University (Istanbul), Jun. 11-22, 2007*, (ed. F. Elzein, A. Suciu, M. Tosun, A. M. Uludag, S. Yuzvinsky), Birkhauser, 177-190, 2010

[その他]

① ホームページ  
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~terao/>

② Researcher ID  
Hiroaki Terao  
RID: A-7771-2012

6. 研究組織

(1) 研究代表者

寺尾 宏明 (TERAO HIROAKI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号: 90119058

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし