

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 15 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340008

研究課題名(和文) 三角圏の研究とそのCohen-Macaulay加群への応用

研究課題名(英文) Study on triangulated categories and its application to Cohen-Macaulay modules

研究代表者

吉野 雄二 (Yoshino, Yuji)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：00135302

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,800,000円、(間接経費) 3,240,000円

研究成果の概要(和文)：Cohen-Macaulay加群の退化を研究するために、安定圏における退化の類似(安定的退化)について詳しく考察した。その結果、実際的計算を含めて単純特異点上のCohen-Macaulay加群の退化の様子がわかるようになった。

また、素数を標数に持つ完備局所環上の有限生成加群について、その上のフロベニウス写像の左からの作用が、そのMatlis双対の右からの作用に自然に拡張される。これらの間の双対定理を証明することができた。

研究成果の概要(英文)：In order to analyze the degeneration of Cohen-Macaulay modules, we have given careful consideration to the analogue of degeneration in the stable category, which we call the stable degeneration. As a result we obtained several satisfactory results which clarify the degeneration over a simple singularity.

Moreover, about a finitely generated module over a complete local ring of prime characteristic, we gave a proof of the duality theorem between the left Frobenius actions on a module and the right Frobenius actions on its Matlis dual module.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学 可換環 Cohen-Macaulay加群 導来圏 安定圏 退化

### 1. 研究開始当初の背景

Cohen-Macaulay 局所環上の Cohen-Macaulay 加群の研究は、研究代表者自身が 1990 年に著した著書；

[1] Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings, London Math. Society, Lecture Note Series no. 146, Cambridge University Press (1990).

において研究の枠組みが展開され、そこで示された方向性に従って、その後 20 年近く多くの継続的研究が内外の研究者によって続けられてきたものである。この研究の方向性は主に Cohen-Macaulay 加群の分類という観点に重点が置かれていた。

ところで、研究代表者は本研究課題申請の前に、「変形」という観点から次の二つの論文の成果を得ていた。

[2] O. Iyama and Y. Yoshino ; " Mutations in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules ", Inventiones Math. vol. 172 (2008) no.1, 117--168.

[3] Y. Yoshino ; " Universal lifts of chain complexes over non-commutative parameter algebras ", Journal of Math. of Kyoto University, vol. 48 (2008) no.4, 793--845.

両論文とも Cohen-Macaulay 加群の理論に根ざす代数学の基本的な問題をさらに一般化した設定で理論展開したものである。[2] では、団傾部分圏の変形を、[3] では鎖複体の変形をそれぞれ取り扱っている。上記の [1] で示された Cohen-Macaulay 加群の「分類」という方向性に加えて、「変形」という新たな視点からも Cohen-Macaulay 加群の研究が可能であるということが示されていたと考えてもよい。

### 2. 研究の目的

上記のような背景の下で、Cohen-Macaulay 加群の理論に「変形」という視点を持ち込んで従来の結果を捉え直し、さらには一般的な理論展開をすることが本研究課題の目的である。

### 3. 研究の方法

上記の [1] [2] [3] の研究代表者自身の結果をもとにした Cohen-Macaulay 加群の理論展開を行うことによって、可能な限り圏論的な結果として表されるものを追求する。一方で、「変形」自身とは異なるが、変形の極限と考えられる「退化」について研究することも有力な研究方法である。

加群の退化については、研究代表者によって、2004 年に Journal of Algebra でもっとも一般的な形で加群の退化の定義が代数的に与えられた。この退化の代数的定義に基づいて、Cohen-Macaulay 加群の理論を展開することが、本研究の特徴の一つでもある。

### 4. 研究成果

(1) 研究代表者自身による加群の退化の代数的な定義に基づいて、Cohen-Macaulay 加群の退化の新しい理論体系を構築することは本研究課題の重要な研究目標の一つであった。今まで加群の退化は加群圏(アーベル圏)においてのみ考察されてきたが、Cohen-Macaulay 加群の退化の安定圏における類似を詳しく考察した。

その結果として、安定圏における退化は従来の退化と密接な関係にあり、実際の計算においては安定圏における退化の方が易しいこと、その結果を用いて従来の加群圏における退化の様子を知ることができることなどが分かった。(雑誌論文)

また、その継続研究として、雑誌論文では、偶数次元の A 型の単純特異点上の Cohen-Macaulay 加群の退化の様子を記述するアルゴリズムを得ることができた。さらには有限表現型の完備 Cohen-Macaulay 局所環上の Cohen-Macaulay 加群の退化はすべて Auslander-Reiten 列の退化から得られることなどが証明できた。

(2) アーベル圏の加法的な部分圏についてそのピカル群を圏論的に定義した。そして、それが従来の環のピカル群や因子類群の概念等を取り込んだより一般的な圏の不変量となっていることを確かめることができた。また部分圏の自己同型群をこのピカル群を使って表示する新たな公式を得た。(平松との共同研究、雑誌論文)

(3) 局所コホモロジーの一般化として、二つのイデアルに付随した新たな局所コホモロジー関手を定義し、それらの基本的性質や可換環論への応用を与えることができた。(高橋・吉沢との共同研究、雑誌論文)

さらに、このコホモロジー関手を特徴付ける圏論的な性質について考察を行い、局所コホモロジー論の圏論的な展開を行った。導来圏における  $t$ -構造と局所コホモロジー関手の関係については従来から知られていたことではあるが、抽象局所コホモロジー関手という新しい概念を導入した。また、この考察を通して、古典的な局所コホモロジー関手や上述の二つのイデアルに付随した局所コホモロジー関手を関手全体の集合の中で特徴付けることができた。(吉澤との共同研究、雑誌論文)

(4) 無限個の変数持つ多項式環のイデアルに対して、グレブナ基底の一般論を展開して、その組み合わせ論への応用として、分割数の個数の母関数に関する様々な関数等式の新たな証明を与えた。(飯間との共同研究、雑誌論文)

(5) Rodney Y. Sharp 氏との共同研究によって、フロベニウス型の歪多項式環の研究を深化させた。素数を標数に持つ局所環上の有限生成加群について、その上のフロベニウス写像の左からの作用が、その Matlis 双対の右からの作用に自然に拡張される。この対応

によって歪多項式環上の右加群(基礎となる素数標数局所環上有限生成加群)と左加群(基礎環上アルティン加群)との間に、双対性が成立することを証明した。さらには、この双対性理論をイデアルの密着閉包の理論に応用することで、数々の新しい事実を見出すことができた。(雑誌論文)

(6)2013年のベトナム・ハノイの研究会での招待講演(学会発表)では、可換環上の無条件な鎖複体から成る最も大きな導来圏において、ある種の消滅定理が得られることを報告した。また、それを使って生成的にGorenstein的であるような可換環上で(太刀川予想を含む)ある種の予想を提唱した。

さらに、研究代表者は2014年3月に開催された日本数学会年会において、日本数学会代数学賞を受賞した(学会発表)。この受賞理由によれば、本研究課題の研究成果でもある加群の変形・退化の理論への研究代表者の貢献が学会において大いに評価されたものであった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

N.Hiramatsu and Y.Yoshino; Examples of degenerations of Cohen-Macaulay modules, Proceedings of the AMS, vol.141(2013), pp.2275--2288.

Y. Yoshino; Stable degenerations of Cohen-Macaulay modules, Journal of Algebra, vol. 332 (2011), pp.500--521.

Y. Yoshino and T. Yoshizawa; Abstract local cohomology functors, Math. Journal of Okayama University, vol.53 (2011), pp. 129--154.

R.Y.Sharp and Y.Yoshino; Right and left modules over the Frobenius skew polynomial ring in the F-finite case, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 150 (2011), issue 03, pp.419--438.

R. Takahashi, S.Yassemi and Y. Yoshino; On existence of embeddings into modules of finite homological dimensions, Proceedings of the American Math. Soc., vol.138, no. 7 (2010), 2265-2268.

N.Hiramatsu and Y.Yoshino; Automorphism groups and Picard groups of additive full subcategories, Mathematica Scandinavica, vol.107 (2010), pp. 5--29.

K.lima and Y.Yoshino; Grobner bases for the polynomial ring with infinite variables and their applications, Communications in Algebra, vol.37, no.10 (2009), pp. 3424--3437.

S.Nasseh and Y.Yoshino; On Ext-indices of ring extensions, Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 213 no.7 (2009), pp. 1216--1223.

R.Takahashi, Y.Yoshino and T.Yoshizawa; Local Cohomology based on a nonclosed support defined by a pair of ideals, Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 213 no.4 (2009), pp. 582--600.

[学会発表](計 17 件)

吉野雄二; "Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings", 2014年度代数学賞受賞特別講演、2014年3月17日、日本数学会年会(学習院大学)

Yuji Yoshino; "A remark on vanishing of chain complexes", International conference on commutative algebra and its Interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics, December 16-20, 2013, Hanoi Institute of Math., Vietnam. (講演は12月17日)

Yuji Yoshino; "Dependence of totally reflexivity conditions", Perspectives of Representation Theory of Algebras, Conference honoring Kunio Yamagata on the occasion of his 65th birthday, Main Speaker, November 11-15, 2013, Nagoya University. (講演は11月14日)

Yuji Yoshino; "Universal deformations of modules along non-commutative parameters, Colloquium Talk at Nebraska University, Lincoln. February 10(Friday). 2012.

Yuji Yoshino; "Deformations and degenerations of modules", Seminar Talk at Nebraska University, Lincoln. February 9(Thursday), 2012.

Yuji Yoshino; "Primary decompositions in abelian categories", The 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Quy Nhon University, Vietnam. December 12-16, 2011. (Invited speaker, 1 lecture on December 13.)

吉野雄二; "Introduction of representation theory of Cohen-Macaulay

modules and their degenerations I, II", 第 44 回環論および表現論シンポジウム、岡山大学理学部、2011 年 9 月 25 日～27 日。(Invited speaker, 2 lectures on 25th and 26th.)

Yuji Yoshino; "Degeneration and stable degeneration of Cohen-Macaulay modules", Joint CIMPA-ICTP-UNESCO-MICINN-INDONESIA Research School, "Geometric Representation Theory", Institut Teknologi Bandung, Indonesia. August 1--12, 2011. (Invited Speaker, 4 lectures on Aug. 1, 4, 8 and 11th.)

吉野雄二; "Stable analogue of degenerations of Cohen-Macaulay modules", 第 32 回可換環論シンポジウム(第 6 回 Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra), IPC 生産性国際交流センター, 神奈川県葉山町湘南国際村, 2010 年 12 月 11 日--16 日.

Yuji Yoshino; "Degeneration of Cohen-Macaulay modules in stable category", ICRA (International Conference of Representations of Algebra and Workshop) XIV, Tokyo, August 6 - 15, 2010. (Plenary and invited talk)

Yuji Yoshino; "Local cohomology and t-structure", The 5th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra, Vietnam Academy of Science and Technology, Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam, January 5 - 9, 2010.

吉野雄二, 吉澤毅; "Subfunctors of identity functor and t-structures", 第 31 回可換環論シンポジウム(ホテルアウイーナ大阪), 2009 年 11 月 24 日--27 日.

Yuji Yoshino; "Non-graded MCM modules over a graded Gorenstein ring", 京都大学数理解析研究所・共同利用研究集会「代数的三角圏とその周辺」, 7 月 22 日-24 日, 2009 年

吉野雄二, 吉澤毅; "フロベニウスの右作用と左作用", 学会一般講演(東京大学駒場キャンパス), 3 月 26 日～29 日, 2009 年.

吉野雄二, 平松直哉; "加法的部分圏の自己同型群", 学会一般講演(東京大学駒場キャンパス), 3 月 26 日～29 日, 2009 年.

高橋亮, Siamak Yassemi, 吉野雄二; "射影次元が有限な加群への埋め込み", 学会一般講演(東京大学駒場キャンパス), 3 月 26 日～29 日, 2009 年

Yuji Yoshino; "Auto-equivalences of additive full subcategories", The 4th Japan-Vietnam Joint Seminar, 明治大学(生田), 2 月 17 日～21 日, 2009 年.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等;  
<http://www.math.okayama-u.ac.jp/~yoshino/JapaneseIndex.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉野 雄二 (YOSHINO, Yuji)  
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号: 00135302

### (2) 研究分担者

荒谷 督司 (ARAYA, Tokuji)  
岡山理科大学・理学部・准教授  
研究者番号: 70613222

### (3) 連携研究者

伊山 修 (IYAMA, Osamu)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授  
研究者番号: 70347532

高橋 亮 (TAKAHASHI, Ryo)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授  
研究者番号: 40447719

山形 邦夫 (YAMAGATA, Kunio)  
東京農工大学・共生科学技術研究科・教授  
研究者番号: 60015849