

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年3月25日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21340010

研究課題名（和文）数論的位相幾何学の発展と応用

研究課題名（英文）Development and Applications of Arithmetic Topology

研究代表者

森下 昌紀（MORISHITA MASANORI）

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：40242515

研究成果の概要（和文）：

結び目と素数の類似に基づき、結び目理論(3次元位相幾何学)と数論の間の類似性についての数学の新しい研究領域 - 数論的位相幾何学 - を創始し、その基礎付けを行った。これに関し、著書をまとめた（[図書] 1）。応用として、3次元双曲幾何、Chern-Simon 理論と肥田理論の類似性に関する研究を行い、論文を著した（[雑誌論文]1, 2, 3）。さらに、国際研究集会を2009年から2012年にかけて毎年主催した。

研究成果の概要（英文）：

Based on the analogies between knots and primes, I found a new branch of mathematics, called arithmetic topology, focused upon the analogies between knot theory and number theory. I wrote a book giving a foundation of this field. As applications, I studied some analogies between 3-dimensional hyperbolic geometry, Chern-Simons theory and Hida theory. I also organized international workshops, "Low dimensional topology and number theory", every year during 2009 - 2012.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2010年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2011年度	1,500,000	450,000	1,950,000
年度			
年度			
総計	4,700,000	1,410,000	6,110,000

研究分野：代数学，幾何学

科研費の分科・細目：数論，位相幾何学

キーワード：結び目，素数

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、1998年ごろ、結び目と素数の類似に基づき、結び目理論(3次元位相幾何学)と数論の間の類似性を発見し、数

学の新しい研究領域 - 数論的位相幾何学 - を創始した。以来、この分野の基礎付けに取り組んできたが、この分野と他の研究領域（特に、数理物理学）との関係や応用について研究を始める段階にあった。

2. 研究の目的

代表者の発見した類似の辞書に基づき、結び目理論と数論の間の様々な理論の間の類似・関連性を明らかにし、相互啓発的な研究を行うことを目的とする。

さらに、結び目理論と数理論物理学との強い関係性に注目し、数論と数理論物理学の間の深い関連性を明らかにすることも目的とする。

3. 研究の方法

代表者の独自の総合的思索のもとに、結び目理論、数論及び数理論物理学の専門家との議論や国際研究集会の開催を通じ、本研究課題を遂行する。

また、代表者の大学院学生（現在10名）に適宜、数論的位相幾何学の基礎的問題を提起し、この分野の充実をはかる。

4. 研究成果

数論的位相幾何学の基礎付けに関する著書をまとめた。この本のSpringer社により内容説明は次の通りである：

This is a foundation for arithmetic topology - a new branch of mathematics which is focused upon the analogy between knot theory and number theory. Starting with an informative introduction to its origins, namely Gauss, this text provides a background on knots, three manifolds and number fields. Common aspects of both knot theory and number theory, for instance knots in three manifolds versus primes in a number field, are compared throughout the book. These comparisons begin at an elementary level, slowly building up to advanced theories in later chapters. Definitions are carefully formulated and proofs are largely self-contained. When necessary, background information is provided and theory is accompanied with a number of useful examples and illustrations, making this a useful text for both undergraduates and graduates in the field of knot theory, number theory and geometry.

この著書にある基礎付けに基づき、その応用として、3次元双曲幾何、Chern-Simon理論と肥田理論の類似性に関して、寺嶋郁二氏（東京工業大学）と共同研究を行い、論文を著した。具体的な内容は次の通りである。

1. 双曲構造の変形と Galois 表現の変形の間類似性に基づき、双曲構造の変形空間上に定義された Chern-Simons 汎関数の Deligne コホモロジーを用いた数論幾何的な解釈を与えた。そして、変形空間上に Chern-Simons モチーフなるものが存在するだろうという予想を与えた。

この予想は、Dimofte, Gukov, Lennel, Zagier による数論的摂動的場の理論の予想とも整合性をもっており、興味深い。

また、3次元双曲幾何学と4次元 Seiberg-Witten 理論の間の類似性について発見した。

この研究について、国際研究集会等で研究発表を行った。

2. 結び目理論における Alexander-Fox 理論と岩澤理論の間には親密な並行性があることが知られているが、基本群と Galois 群の表現の視点により、この類似性は3次元双曲幾何と肥田-Mazur 理論の間の類似性へ拡張される。

このとき、Galois 表現の変形空間上に定義される代数的及び解析的な p 進 L 関数の双曲幾何版を構成することは大変興味深い問題であった。

われわれは、まず、結び目群の $SL(2)$ 表現の変形理論をつくり、つぎに代数的な Selmer 加群とその特性元の結び目理論における類似物を導入した。

この研究について、国際研究集会等で研究発表を行った。

さらに、2009~2012年にかけて、低次元トポロジーと数論に関する国際研究集会「Low dimensional topology and number theory」を毎年主催し、毎年数名の外国人研究者を招へいし、議論をかわした。

また、大学院学生2名が代表者の提起した問題を解決し、数論的位相幾何学に関する論文を著した：

- F. Amano, On a certain nilpotent extension over \mathbb{Q} of degree 64 and 4-th multiple residue symbol, Submitted.
- J. Ueki, On branched coverings of 3-manifolds, to appear in Nagoya Math. J.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3件)

1. M. Morishita, Y. Terashima, Chern-Simons variation and Deligne cohomology, to appear in: Spectral Analysis in Geometry and Number Theory on Prof. Toshikazu Sunada's 60th birthday, Contemporary Math., AMS. 127-134, 2009.
2. M. Morishita, Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number rings, Sugaku Expositions, AMS. 2010.
3. 森下昌紀, 数論と結び目変量, 数理学「数学と物理に広がる不変量—量子トポロジーとその周辺」, 36-41, 2009年9月号, サイエンス社.
4. M. Morishita, The universal deformation and the associated homological invariants for hyperbolic knots, Oberwolfach report, 2010. .

[学会発表] (計 6件)

1. 平成 21 年 8 月 22 日, Tsinghua University, China, East Asia Number Theory Conference, 「3-dimensional hyperbolic geometry and Hida theory」
2. 平成 21 年 11 月 17 日, 広島大学, トポロジー—幾何学セミナー, 「The universal deformation and the associated Alexander-Fox invariant」
3. 平成 22 年 2 月 8, 9, 10 日, KAIST, 韓国, Colloquium and seminars, 「Knots and Primes」
4. 平成 22 年 7 月 15 日, KIAS, Korea, Number Theory Seminar, Lecture on arithmetic topology.
5. 平成 22 年 8 月 17 日, Oberwolfach, Germany, Low dimensional topology and number theory, The universal deformation and the associated homological invariants for

hyperbolic knots」

6. 平成 23 年 8 月 11 日, 岡山大学, 代数学シンポジウム, 「数論的位相幾何学と数論的場の理論」
7. 平成 23 年 8 月 25 日, 東北大学, 仙台シンポジウム, 「結び目と素数 — 数論的位相幾何学入門」
8. 平成 24 年 2 月 16 日, Tata Institute of Fundamental Research, 「Knots and Primes」

[図書] (計 2件)

1. M. Morishita, Knots and Primes -- An Introduction to Arithmetic Topology, Universitext, Springer, 2012.
2. 森下昌紀, 結び目と素数 ---- 数論的位相幾何学, 日本の現代数学—新しい展開をめざして—, 数学書房, 2010 年.

[その他]

国際研究集会の主催:

Low dimensional topology and number theory II, 2010, 3 月, 東京.

Low dimensional topology and number theory III, 2011, 3 月, 福岡

Low dimensional topology and number theory IV, 2012, 3 月, 福岡

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~morishita/workshop.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森下昌紀 (MORISHITA MASANORI)
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号: 40242515

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

河野俊丈 (東京大学・数理科学研究科・教授)

栗原将人（慶応義塾大学・理工学部・教授）

坂内健一（慶応義塾大学・理工学部・講師）

田口雄一郎（九州大学・数理学研究院・准教授）

寺嶋郁二（東京工業大学・理工学研究科・助教）