

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 20 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340011

研究課題名(和文)非可換調和振動子の数論と行列式の表現論研究

研究課題名(英文) Mathematics for Non-commutative Harmonic Oscillators and Representation Theory of α -determinants

研究代表者

若山 正人 (Wakayama, Masato)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：40201149

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,100,000円、(間接経費) 3,030,000円

研究成果の概要(和文)：1. Eichler 積分の拡張である Residual modular forms と周期的 Eichler コホモロジー群を定式化し、非可換調和振動子(NcHO)のスペクトルゼータ関数の特殊値の研究を進めた。
2. 奇関数の場合にのみ知られていたNcHOのスペクトル問題とある種のホイン方程式の正則解の存在の問題との同値性を完全に示した。副産物として、ホイン方程式のモノドロミー表現を用い固有値の縮退についての懸案の疑問を解決した。
3. NcHOと量子 Rabi モデルの間の関係を導いた。

研究成果の概要(英文)：1. We described the special value at $s=4$ of the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator (NcHO) by introducing the notion of residual modular forms, which is a generalization of Eichler integrals. With this investigation, we introduced the periodic Eichler cohomology groups and determined the structure of certain congruence subgroups of $SL_2(\mathbb{Z})$.
2. We showed a complete description of the eigenvalue problem for NcHO, which is defined by a matrix-valued self-adjoint ordinary differential operator, in terms of Heun's ordinary differential equations (Only the odd case was given by Ochiai in 2001). As a by-product, using the monodromy representation of Heun's ODEs, we proved that the multiplicity of the eigenvalue of NcHO is at most two.
3. We described a connection between the quantum Rabi model and NcHO, employing principal series of sl_2 and confluent procedure of Heun ODE.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：非可換調和振動子 ゼータ関数 表現論 行列式 不変式論 保型形式

1. 研究開始当初の背景

スペクトル問題は、連携研究者落合により Heun ODE (4 点に確定特異点を持つ Fuchsian ODE) のモノドロミー問題へ帰着され、さらに接続問題が論じられるなど、特殊関数の研究と関連が深い。また申請者らにより明らかになった楕円曲線のモジュライとの関係は、Zagier, Haran らの強い関心を引くなど、その豊かな数学的構造が示されつつある。他方、(擬)微分作用素の正值性などへの興味から、より一般の行列型作用素が Hörmander, Brummelhuis, Parmeggiani らにより研究されている。さらに最近では、谷口により、熱核の Wiener 積分を用いた確率解析の立場からの研究も始まっている。

行列式は、分担者白井と高橋陽一郎による Fredholm 行列式に付随する点過程の研究でも重要な役割を果たした。

申請者は、自明表現と交代表現の表現としての補間理論の構築を動機に 行列式の表現論の研究を開始した。行列式で生成される $GL(n)$ -巡回加群では、 $GL(n)$ が分割 $GL(n)$ の content 多項式 (Macdonald の対称関数の教科書) の根 (特異値) のとき、 $GL(n)$ を最高ウェイトとする既約表現は分解には寄与しないことがわかった。

2. 研究の目的

非可換調和振動子の数理の研究を展開し、関連する数学を深めることである。とくにそのスペクトルの表現論的研究と楕円曲線や保型形式といった数論的な性質の理解を深めることにある。

行列式の表現論・不変式論的研究と、その応用研究を進めること。

3. 研究の方法

国内外の研究協力者や連携研究者との共同研究を中心として、関連する領域の研究者との情報交換 (国際会議等での講演、国内外のワークショップへの参加や講演など) を通じての研究を進めた。

4. 研究成果

非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値の研究を進めた。これにより、通常の保型形式の枠組ではつかまらない特殊値を、Residual modular forms という Abel 積分・Eichler 積分の拡張概念を導入し、記述することに成功した。

さらには、関連して周期的 Eichler コホモロジー群を導入し、その構造をある程度まで解明することができた。

さらに、非可換調和振動子と量子相互作用モデルの理論の代表格である量子 Rabi モデルの間の関係を、表現論とホイン方程式の合流という観点から発見した。

また、非可換調和振動子の提出以来懸案であったスペクトルの縮退問題について解決した。

行列式の生成する一般線型群加群の研究から現れたリース行列式 (左からの対称群のリース積と右からの一般線型群の作用の相対不変式) を用いた、群行列式の拡張概念である「群ペアリース行列式」を、群とその部分群に対して定義し、研究を行った。

とくに群が有限アーベル群とその部分群の場合に、変数の特殊化を行った上で、完全に決定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

Kazufumi Kimoto, Sho Matsumoto and Masato Wakayama, Alpha-determinant cyclic modules and Jacobi polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 361 巻, 2009, 6447 頁 -6473 頁

Masato Wakayama, Yoshinori Yamasaki, Higher regularizations for zeros of cuspidal automorphic L-functions of GL_d , J. Theor. Nombres Bordeaux, 23 巻, 2011 年, 751 頁-767 頁

Takuro Imai, Akira Takaesu and Masato Wakayama, Remarks on geodesics for multivariate normal models, Journal of Math-for-Industry, 2011 巻, 2011 年, 125-130 頁

K. Kimoto, M. Wakayama, Spectrum of non-commutative harmonics oscillators and residual modular forms, Noncommutative Geometry and Physics, World Scientific

Jacques Faraut & Masato Wakayama, Invariant differential operators on the Heisenberg group and Meixner-Pollaczek polynomials, Advances in Pure and Applied Mathematics, 2013 年

Nobushige Kurokawa, Masato Wakayama & Yoshinori Yamasaki, Milnor-Selberg zeta functions and zeta regularizations, Journal of Geometry and Physics, Volume 64, 2013, 120-145 頁,

DOI 10.1016/j.geomphys.2012.10.015

M. Wakayama & K. Yamamoto, Non-linear algebraic differential equations satisfied by Certain family of elliptic functions, The Ramanujan Journal, 30(2), 2013年, 173-186頁, DOI 10.1007/S11139-012-9425-3

K. Kimoto & M. Wakayama, Spectrum of non-commutative harmonics oscillators and residual modular forms, Proceedings of the RIMS Thematic Year 2010 on Perspectives in Deformation Quantization and Noncommutative Geometry, Volume 1, 2013年, 23-267頁

若山正人, Multivariate Meixner-Pollaczek polynomials 若山正人 and an application, 数理解析研究所講究録 1825 非現論と非可換調和解析の展望, 1825巻, 2013年, 197-204頁

Masato Wakayama, Simplicity of the lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillators and the Riemann scheme of a certain Heun's differential equation, Proceedings of the Japan Academy, 89巻, 2013年, 69-73頁, doi:10.3792/pjaa.89.69

Jacques Faraut & Masato Wakayama, Invariant differential operators on the Heisenberg group and Meixner-Pollaczek polynomials, Advances in Pure and Applied Mathematics, 4巻, 2013年, 41-66頁, DOI: 10.1515/apam-2013-0204

〔学会発表〕(計 24件)

若山正人, ゼータ正規化積による保型形式の構成, 研究集会“表現論がつなく数学の展望”, 2011/8/29, ホテルサンルート名古屋

若山正人, Negative Weight Modular Forms, Zetas and Limit Laws in OKINAWA 2011, 2011/11/27, Festone, 沖縄

若山正人, Spectrum of Non-commutative Harmonic Oscillators and Modular Forms, RMS 研究集会“Spectral and Scattering Theory and Related Topics”, 2011/12/15, RIMS, 京都大学

若山正人, Remarks on geodesics for multivariate normal models, WIAS+MATHON Colloquium, 2012/1/9, WIAS, Berlin, Germany

若山正人, Residual modular forms, Eichler cohomology and spectrum of non-commutative harmonic oscillators, Institute for Advanced study, New Zealand Colloquium, 2012/2/27, Massey University

若山正人, Number theoretical approach to spectrum for non-commutative harmonic oscillators, "Avoided ? Crossing of Eigenvalue Curves" -- Non-commutative

Harmonic Oscillator, Special Functions and Number Theory-, 2012/3/7, 九州大学
今井卓郎(九大数理), 若山正人(九大 IMI), 高江洲旭(NEC), Remarks on geodesics for multivariate normal models, 日本数学会, 2012年度会, 2012/3/28, 東京理科大学

若山正人(九大 IMI), J. Faraut (Paris6), Hermitian symmetric spaces of tube type and multivariate Meixner Pollaczek polynomials, 日本数学会 2012年度会, 2012/3/28, 東京理科大学

木本一史(琉球大理), 若山正人(九大 IMI), 非可換調和振動子のスペクトルゼータ値に現れる (2)-モジュラー性, 日本数学会 2012年度会, 2012/3/28, 東京理科大学

山崎 義徳(愛媛大理), 若山正人(九大 IMI), カスプ表現に付随する L-関数の零点に関する Milnor 型ゼータ正規化積 について, 日本数学会, 2012年度会, 2012/3/29, 東京理科大学

若山正人, Multivariate Meixner-Pollaczek Polynomials, Sala de Seminarios, 2012/06/06, Centro de Modelamiento Matematico, Chile

若山正人, 表現論と非可換調和解析の展望, Multivariate Meixner-Pollaczek polynomials and an application, 2012/06/19 ~ 2012/06/22, 京都大学数理解析研究所

若山正人, Oscillator representations and Meixner-Pollaczek polynomials, 表現論から見える数学の諸相, 2012/10/12 ~ 2012/10/13, サンパレス球陽館(OKINAWA)

若山正人, Remarks on parity of eigenfunctions of NchO via Heun DE, Zetas and Limit Laws in OKINAWA 2012, 2012/11/18 ~ 2012/11/20, Festone, Ginowan, OKINAWA

若山正人, Eichler cohomology groups for spectrum of NchO's, Spectral analysis of non-commutative harmonic oscillators and quantum devices, 2012/11/26 ~ 2012/11/27, Kyushu University

若山正人, Analysis and arithmetic of non-commutative harmonic oscillators, BCAM Seminar, 2013/03/01, Basque Center of Applied Mathematics, Spain

若山正人, Introduction to Mathematics for Industry, Seminar in Grenoble, 2013/03/01, Univ. Joseph Fourier, France

若山正人, Analysis and Number Theory for Non-commutative Harmonic Oscillator, Distinguished Lecture Series, 2013/04/22, Department of Mathematics, Indiana University, Bloomington

若山正人, Problems around NchO, 表現論がつなく数学, 2013/09/28, ひめぎんホール別館・第20会議室

若山正人, Spectrum of non-commutative harmonic oscillators-number

theory, representation theory and Fuchsian

Equations, Mathematical Quantum Field Theory and Related Topics, RIMS, 2013/10/03, Kyoto University

若山正人, Quantum Interaction Models and Number Theory, Zeta Functions in OKINAWA 2013, 2013/10/19, 沖縄コンベンションセンター

②1 若山正人, A Lie theoretic proposal on algorithms for spherical harmonic lighting, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis, 2013/10/22, Centennial Hall Kyushu University School of Medicine, Fukuoka

②2 若山正人, Residual modular forms and curves, the quantum Rabi model, and discrete series representations from the study of spectral zeta functions of the NcHO, Geometric zeta functions and related topics, 2013/10/31, Saga University

②3 若山正人, Spectrum of non-commutative harmonic oscillators - Modular forms, representation theory and the Rabi model, colloquium, 2013/11/29, Mathematical Institute, Leiden University

②4 若山正人, An application of Lie theory to computer graphics via spherical harmonics, Berliner Colloquium fur wissenschaftliche Visualisierung, 2014/02/28, Zuse-Institut Berlin (ZIB)

〔図書〕(計 2 件)

若山正人, 岩波書店, 可視化の技術と現代幾何学, 2010 年, 240 頁

若山正人, Walter De Gruyter Inc, Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis--Mathematics for Innovation in Industry and Science, 2010 年, 286 頁

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

若山正人ホームページ

<http://imi.kyushu-u.ac.jp/~wakayama/>

九州大学研究者情報(若山正人)

<http://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K000521/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

若山 正人 (WAKAYAMA, Masato)

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号: 40201149

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

