

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340015

研究課題名(和文) グラフィクスとカンドル理論の観点からの4次元トポロジーの研究

研究課題名(英文) Research on 4-dimensional topology from the viewpoint of graphics and quandle theory

研究代表者

鎌田 聖一 (KAMADA, SEIICHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60254380

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,000,000円、(間接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：種数2のレフシェツ・ファイバー束と呼ばれる4次元多様体の構造を表す手法として、グラフィクスを用いる方法(チャート表示)を導入し、それを用いて種数2のレフシェツ・ファイバー束の安定化定理を得た。この定理は、D. AurouxやB. SiebertとG. Tianによる安定化定理を拡張する形になっている。

カンドルに「よい対合写像」という付加構造を与え、対称カンドルの概念とそのホモロジー理論を導入した。それを使えば、向き付け不可能な曲面でも定義が可能な不変量が構成でき、3重点数の評価などに応用できる。

研究成果の概要(英文)：In order to describe a structure of a genus-2 Lefschetz fibration of a 4-manifold, we introduced a graphical method, called the chart description. Using this method, we obtained a theorem on stabilization of genus-2 Lefschetz fibrations, that is a generalization of a theorem due to D. Auroux, and a theorem due to B. Siebert and G. Tian.

A symmetric quandle is a quandle with an additional structure, called a good involution. We introduced the homology theory of a symmetric quandle, and using it, we defined an invariant for surface links in 4-space. The invariant is defined even if the surface link is non-orientable. It can be used for estimation of the minimal triple number of a surface-link.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：トポロジー 4次元 グラフィクス カンドル 結び目 レフシェツ・ファイバー束 モノドロミー
チャート

1. 研究開始当初の背景

2次元ブレイドは、古典的なブレイドの概念を高次元化したものであり、4次元空間内の曲面で構成されている。80年代に L. Rudolph と O. Viro により導入され、当研究代表者が積極的に研究をすすめてきた。結び目理論とブレイドを関係付ける基本定理である Alexander-Markov の定理(任意の絡み目はある基本操作の差を除いて一意的にブレイド表示ができること)は、2次元の場合に一般化され、2次元結び目理論と2次元ブレイド理論の結び付けがなされていた。

2次元ブレイドの分類はブレイドモノドロミーの分類に帰着され、その分類問題は未解決である。また、4次元多様体の研究に現れるレフシェツ・ファイバー束構造の分類も、曲面の写像類群のモノドロミーの分類に帰着される未解決問題である。レフシェツ・ファイバー束は R. Gompf, S. Donaldson たちの仕事により、シンプレクティック4次元多様体との関連が分かったことも影響して、研究が活発となっていた。当研究代表者、松本幸夫(連携研究者)、B. Siebert, G. Tian, D. Yetter などがレフシェツ・ファイバー束のモノドロミーとカンドルの相関関係について研究も行っていた。種数1のレフシェツ・ファイバー束構造の分類は、底空間が一般の場合を含めて完全に解決していたが、グラフィクス(チャート表示)を用いたより明快な証明が、当研究代表者と連携研究者の松本幸夫、松本堯生らによってなされていた。種数2のレフシェツ・ファイバー束についてもグラフィクス(チャート表示)を用いた初期的な研究がなされていた。

カンドル(quandle)は、ある公理系を満たす2項演算を持つ集合で、その公理系が結び目の3つのライデマイスター変形に対応している。これは1982年に D. Joyce と S. Matveev により導入され、結び目の完全不変量となることが分かっている。その後、カンドルのホモロジー理論が登場し、カンドルコサイクル不変量などの結び目、曲面結び目の不変量とその応用研究が始まっていた。

2. 研究の目的

4次元トポロジーにおける2つの問題「4次元多様体の分類」と「4次元に埋め込まれた曲面(2次元結び目を含む)の分類」は、かなりの範囲が、レフシェツ・ファイバー束空間と2次元ブレイドの研究に帰着される。さらに、レフシェツ・ファイバー束空間のモノドロミーはグラフィクスやカンドル(quandle)を用いて記述される。グラフィクスとカンドルを用いて4次元のオブジェクトとそのモノドロミーの性質を調べ、不変量の構成、分類問題に役立てることが当研究の目的である。

3. 研究の方法

研究分担者および連携研究者の協力のもとに4次元オブジェクトのモノドロミーに対応したグラフィクスの構成やカンドルによる表示の研究を行う。また、グラフィクスやカンドルを用いて4次元オブジェクトの性質を調べ、不変量の構成、分類問題などに取り組む。これらは主に研究打合せやセミナー、研究集会を開催することで実行される。

4. 研究成果

種数2のレフシェツ・ファイバー束のグラフィクス(チャート表示)を導入し、それを用いて種数2のレフシェツ・ファイバー束の安定化定理を証明した。レフシェツ・ファイバー束の底空間は、チャート表示では球面でなくてもよいが、安定化定理では球面と仮定している。安定化定理は、5種類の基本レフシェツ・ファイバー束を与え、基本レフシェツ・ファイバー束0型を十分多くファイバー和をすることで、任意のレフシェツ・ファイバー束が、基本レフシェツ・ファイバー束のファイバー和に分解できるという定理である。特に、与えられたレフシェツ・ファイバー束がキラル(レフシェツ特異点が全て正)の場合には、D. Auroux による安定化定理を含んでいる。また、B. Siebert と G. Tian の安定化定理を拡張する形になっている。分解後の基本レフシェツ・ファイバー束の型毎の個数に関しても完全に決定している。それらは、もとのレフシェツ・ファイバー束の持つレフシェツ特異点のタイプ毎の個数で評価される。このように種数2のレフシェツ・ファイバー束の安定化定理としてはもっとも一般的なものとなっている。

種数2で行われた議論は、高い種数のレフシェツ・ファイバー束にも展開できる。

種数1のレフシェツ・ファイバー束で、底空間が円板であり、境界上のモノドロミーがある特別な元であるものの分類に成功した。これはブローケンレフシェツ・ファイバー束と呼ばれるレフシェツ・ファイバー束を一般化したオブジェクトの分類に利用できる。

2次元ブレイドのグラフィクス(チャート表示)に関しては、2重点を許容する特異2次元ブレイドのチャート表示、および、単純とは限らない2次元ブレイドを表すチャート表示に関する研究を行い、(単純とは限らない)正則な2次元ブレイドのチャート表示法を確立した。任意の正則な2次元ブレイドは正則チャートで表すことができ、そのような表示はある基本変形の差を除けば一意に定まることを示した。この定理は今後、非正則な一般的な2次元ブレイドを研究する際の道具として活用できる。

2次元ブレイドとそのグラフィクスの高次元化として、3次元ブレイドとそのグラフィクス(チャート表示)の概念を導入した。しかし、同値な3次元ブレイドを表すチャー

トの間を繋げるための基本操作が明確には得られておらず、具体例も少ないことから、今後更なる研究が必要である。

カンドルを用いた結び目、曲面結び目の研究に関しては、対称カンドルのホモロジー理論を導入し、結び目および曲面結び目の不変量を構成した。結び目、曲面結び目に向きがある必要はなく、曲面結び目については、向き付け不可能な曲面でも定義が可能である。向き付け不可能な曲面結び目の3重点数を下から制限する評価式を得ることができ、具体例を構成した。また、2面体主の許容する対称カンドル構造を決定した。この研究は、大城佳奈子との共同で論文として発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

(1) Seiichi Kamada, Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization, *Topology Appl.* 159 (2012), no. 4, 1041—1051, 査読有り, DOI: 10.1016/j.topol.2011.11.031

(2) Naoko Kamada and Seiichi Kamada, Biquandles with structures related to virtual links and twisted links, *J. Knot Theory Ramifications* 21 (2012), no. 13, 1240006, 14 pp., 査読有り, DOI: 10.1142/S0218216512400068

(3) 鎌田聖一, quandle と結び目理論, *数学* 64 (2012), no. 3, 304—324, 査読有り

(4) Seiichi Kamada, Theory of 2-dimensional braids and knots in dimension four, *Sugaku Expositions* 25 (2012), no. 1, 1—18, 査読有り

(5) J. Scott Cater and Seiichi Kamada, Braids and branched coverings of dimension three, *数理解析研究所講究録*, No. 1812 (2012), 64—81, 17pp., 査読有り

(6) Mikami Hirasawa, Naoko Kamada and Seiichi Kamada, Bridge presentations of virtual knots, *J. Knot Theory Ramifications* 20 (2011), no. 6, 881—893, 査読有り
DOI: 10.1142/S0218216511009017

(7) Atsushi Ishii, Naoko Kamada and Seiichi Kamada, The Miyazawa polynomial for long virtual knots, *Topology Appl.* 157 (2010), no. 1, 290—297, 査読有り

(8) Seiichi Kamada, Quandles derived from dynamical systems and subsets which are closed under quandle operations, *Topology Appl.* 157 (2010), no. 1, 298—301, 査読有り

(9) Seiichi Kamada and Kanako Oshiro, Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links, *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), no. 10, 5501—5527, 査読有り

(10) Andrew Bartholomew, Roger Fenn, Naoko Kamada, Seiichi Kamada, New invariants of long virtual knots, *Kobe J. Math.* 27 (2010), no. 1—2, 21—33, 査読有り

[学会発表](計27件)

(1) Seiichi Kamada, Chart description of surface braids, Advanced School and Discussion Meeting, Knot Theory and Its Applications, 2013年12月12日, IISER Mohali, Punjab, インド

(2) Seiichi Kamada, A chart description of simple or regular surface braids, 国際研究集会「the Lloyd Roeling UL Lafayette Mathematics Conference」, 2013年11月8日, University of Louisiana at Lafayette, ルイジアナ, 米国

(3) Seiichi Kamada, Charts for 3-dimensional braids, アメリカ数学会, 特別セッション「Algebraic Structures in Knot Theory III」, 2013年11月3日, University of California at Riverside, カリフォルニア, 米国

(4) Seiichi Kamada, Two and three dimensional braids and their descriptions, 位相数学・微分幾何学国際会議兼第6回日本メキシコ位相数学合同シンポジウム, 2013年9月2日, 島根大学

(5) 鎌田聖一, 2次元ブレイドとチャート表示, 第60回トポロジーシンポジウム, 2013年8月6日, 大阪市立大学

(6) Seiichi Kamada, Low dimensional braids and chart descriptions, TAPU Winter Seminar, 2013年2月4日, Kyungpook National University (慶北国立大学), テグ, 韓国

(7) Seiichi Kamada, Three dimensional braids and their braid monodromies, 国際研究集会「The Ninth East Asian School of Knots and Related Topics」, 2013年1月16日, 東京大学

(8) 鎌田聖一, 非単純 2 次元ブレイドのチャート表示について, 研究集会「Hurwitz action とその周辺」, 2013 年 1 月 5 日, 群馬大学

(9) Seiichi Kamada, Branched coverings and braided manifolds of low dimensions, 国際研究集会「Knots in Washington XXXV」, 2012 年 12 月 9 日, George Washington University, Washington DC, 米国

(10) 鎌田聖一, 結び目のカンドル彩色, 研究集会「2012 琉球結び目セミナー」, 2012 年 9 月 4 日, 那覇市ぶんかテンプス館

(11) Seiichi Kamada, Presentations of racks, quandles and symmetric quandles, 研究集会「TAPU Summer School on Quandle Theory」, 2012 年 7 月 24 日, Pusan National University (釜山国立大学), 釜山, 韓国

(12) Seiichi Kamada, Graphical description of branched coverings and 2-dimensional braids, The 6th European Congress of Mathematics, 2012 年 7 月 6 日, Jagiellonian University, Krakow, Poland

(13) Seiichi Kamada, Braids and branched coverings of dimension three, 研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」, 2012 年 5 月 18 日, 京都大学

(14) Seiichi Kamada, Twisted biquandles and invariants of twisted links, 国際研究集会「The Eighth East Asian School of Knots and Related Topics」, 2012 年 1 月 10 日, KAIST, 大田, 韓国

(15) Seiichi Kamada, Virtual knots as double covering of twisted knots, 国際研究集会「The 19th TAPU Seminar on Knots and Related Topics」, 2011 年 9 月 16 日, Seacloud Hotel, 釜山, 韓国

(16) Seiichi Kamada, Biquandles with structures related to virtual links and twisted links, 国際研究集会「The 19th TAPU Seminar on Knots and Related Topics」, 2011 年 9 月 15 日, Seacloud Hotel, 釜山, 韓国

(17) Seiichi Kamada, カンドルとその一般化について, 研究集会「2011 琉球結び目セミナー」, 2011 年 9 月 6 日, 那覇市伝統工芸館

(18) Seiichi Kamada, Monodromy representations and their graphical

descriptions, 国際研究集会「Workshop on Low Dimensional Topology in Shanghai and Suzhou」, 2011 年 5 月 17 日, Suzhou University (蘇州大学), 上海, 中国

(19) Seiichi Kamada, Genus one Lefschetz fibrations with a certain non-trivial global monodromy, 国際会議「The Seventh East Asian School of Knots and Related Topics」, 2011 年 1 月 11 日, 広島大学

(20) Seiichi Kamada, Graphic descriptions of monodromy representations II: The stabilization of genus-two Lefschetz fibrations, 国際会議「International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications」, 2010 年 9 月 27 日, Universidad de Colima (コリマ大学), コリマ, メキシコ

(21) Seiichi Kamada, A geometric interpretation of twisted group and quandle of twisted virtual links, 研究集会「The 2nd TAPU-KOOK Joint Seminar on Knot Theory and Related Topics」, 2010 年 7 月 27 日, Kyungpook National University (慶北国立大学), テグ, 韓国

(22) Seiichi Kamada, On quandles and biquandles related to twisted virtual links, 研究集会「Knots in Washington XXX: Categorification, Quantum knots and Quantum computing」, 2010 年 5 月 20 日, George Washington University, Washington DC, 米国

(23) Seiichi Kamada, Braid monodromies, 2-dimensional braids and Lefschetz fibrations, 研究集会「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2010」, 2010 年 3 月 10 日, 広島大学

(24) Seiichi Kamada, On symmetric quandle presentations and surface-knots, 国際会議「The Sixth East Asian School of Knots and Related Topics」, 2010 年 1 月 26 日, Chern Institute of Mathematics, Nankai University (南開大学), 天津, 中国

(25) 鎌田聖一, 対称カンドルと曲面結び目, 研究集会「4次元トポロジー」, 2010 年 1 月 19 日, 広島大学

(26) Seiichi Kamada, Knot symmetric quandles and their presentations, アメリカ数学会, 特別セッション「Algebraic Structures in Knot Theory」, 2009 年 11 月 8 日, University of California at Riverside, カリフォルニア, 米国

(27) 鎌田聖一, 結び目のトポロジーとカントル代数, 日本数学会, 2009年9月26日, 大阪大学

〔図書〕(計1件)

(1) 鎌田聖一, 丸善出版株式会社, 曲面結び目理論, 2012年, 247ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鎌田 聖一 (KAMADA SEIICHI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60254380

(2) 研究分担者

作間 誠 (SAKUMA MAKOTO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 30178602
(H24 H25: 連携研究者)

松本 眞 (MATSUMOTO MAKOTO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 70231602
(H21 H22: 連携研究者)

島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10235616
(H24 H25: 連携研究者)

(3) 連携研究者

松本 堯生 (MATUMOTO TAKAO)
広島大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号: 50025467

寺垣内 政一 (TERAGAITO MASAKAZU)
広島大学・大学院教育学研究科・教授
研究者番号: 80236984

松田 浩 (MATSUDA HIROSHI)
山梨大学・理学部・准教授
研究者番号: 70372703

佐伯 修 (SAEKI OSAMU)
九州大学・マス・フォア・インダストリ
研究所・教授
研究者番号: 30201510

大槻 知忠 (OHTSUKI TOMOTADA)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号: 50223871

河内 明夫 (KAWAUCHI AKIO)
大阪市立大学・数学研究所・専任研究所員

研究者番号: 00112524

金信 泰造 (KANENOBU TAIZO)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00152819

松本 幸夫 (MATSUMOTO YUKIO)
学習院大学・理学部・教授
研究者番号: 20011637

廣瀬 進 (HIROSE SUSUMU)
東京理科大学・理工学部・准教授
研究者番号: 10264144

志摩 亜希子 (SHIMA AKIKO)
東海大学・理学部・准教授
研究者番号: 50317765

佐藤 進 (SATO SHIN)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90345009