

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340016

研究課題名(和文)ワイエルストラス表現公式の一般化と特異点をもつ曲面の理論への応用

研究課題名(英文) Weierstrass-type representation formulas and their application to surfaces with singularities

研究代表者

山田 光太郎 (Yamada, Kotaro)

東京工業大学・理工学研究科・教授

研究者番号：10221657

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,800,000円、(間接経費) 3,540,000円

研究成果の概要(和文)：特異点を許す曲面のさまざまなクラスである、3次元双曲空間の平坦フロント、3次元ミンコフスキー空間の極大曲面、3次元ド・ジッター空間の定平均曲率1の曲面、3次元アフィン空間の非固有アフィン球面などをワイエルストラス公式を用いて考察し、大域的な結果(完備性の特徴づけ、オサーマン不等式など)を得るとともに、あるクラスの曲面を分類した。また、特異点をもつ曲面・超曲面の微分幾何学の土台となるべき「特異曲率」の概念を定義し、それとガウス曲率の挙動との関係を調べるとともに、ガウス・ボンネ型の定理を得た。さらにフロントの内的定式化として「連接接束」の概念を導入し、その双対性と応用を考察した。

研究成果の概要(英文)：We investigated, Weierstrass-type representation formula, global properties of several classes of surfaces with singularities, such as flat surfaces in hyperbolic 3-space, maximal surfaces in Minkowski 3-space, CMC-1 surfaces in de Sitter 3-space, and improper affine sphere in affine 3-space, and obtained a characterization of completeness, Osserman-type inequality etc. In addition, flat trinoids in hyperbolic space and CMC-1 2-noids in de Sitter 3-space are classified. On the other hand, as a basic tool of differential geometry of wave front, we introduced a notion of "singular curvature" and investigated a relationship between singular curvature and behavior of Gaussian curvature. As a result, we obtained Gauss-Bonnet type formula for wave fronts. Moreover, as an intrinsic formulation of wave fronts, we introduced a notion of "coherent tangent bundles" and gave an application of their duality.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：曲面 特異点 フロント 特異曲率 連接接束 ワイエルストラス表現

1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間の極小曲面が、リーマン面上の複素解析的なデータによって具体的に表現できることは「ワイエルストラス表現公式」としてよく知られている。また、いくつかの幾何学的対象について、これと類似な表現公式が存在することがすでに知られている。これらの表現公式は、曲面のはめこみを具体的にあたえているが、「はめこみ」であることはオープンな条件だから、もとのデータの取りかたによっては、特異点が生じる場合がある。このような場合でも適当な枠組を設定すれば、はめこみの場合と同様に幾何学的かつ大域的な考察ができる場合があることがわかってきた。

2. 研究の目的

さまざまな「ワイエルストラス型公式」に統一的な理解をあたえ、表現公式の応用として、「特異点をもつ曲面のクラスの幾何学を研究」し、このような微分幾何学がゆたかな研究対象であることを示す。さらに、このような実例を解析するために、特異点をもつ曲線、曲面の微分幾何学の基礎理論を構築する。

3. 研究の方法

さまざまなクラスの曲面、とくに (1) 空間型 (とくに3次元双曲空間) のフロント (とくに平坦フロント); (2) 不定値計量をもつ空間型の定平均曲率曲面 (とくに3次元ミンコフスキー空間の極大曲面, 3次元ド・ジッター空間の定平均曲率1をもつ曲面) (3) アファイン球面、とくに非固有アファイン球面; などの (A) 特異点を許すクラスを設定し、(B) その大域的な挙動を調べる。さらに「単純な場合」(ユークリッド空間の極小曲面について言えば「絶対全曲率が小さい場合」に対応する) の (C) 分類を行う。また、曲面の (D) 特異点の挙動を詳細に調べる。また、特異点の判定条件、曲率の概念の導入など (E) 特異点の微分幾何学の基礎理論を構築していく。

4. 研究成果

A) 特異点をゆるす曲面のクラスの設定に関して

- ミンコフスキー空間の極大曲面の類似として、3次元ド・ジッター空間の平均曲率1の曲面を考察し、大域的な公式(オサーマン型の不等式)を得た。
- 共形平坦なリーマン多様体を光円錐の超曲面として実現し、光円錐の超曲面の双対性を用いると、この超曲面から新しい共形平坦計量が得られる。この「双対共形平坦計量」は一般に特異点をもつ。このような対象を連接接束の言葉で定式化し、実現定理をもちいて双対性を考察した。
- 3次元ド・ジッター空間の、特異点を許

す定平均曲率1の曲面に対してリーマン面上のある種の特異点をもつ双曲計量が対応する。このような概念に一般的な定義を与え (extended hyperbolic metric), 基本性質を調べるとともに曲面論との関連を考察した。

- また、ワイエルストラス型公式から得られる曲面の一つであるミンコフスキー時空の極大曲面 (特異点をもつ極大曲面; われわれの用語でいうと極大面) は「極大面」の枠に入らない曲面に崩壊することがある。一方、ミンコフスキー時空の時間的極小曲面は、関数のグラフとして表示すると、空間的極大曲面と同じ微分方程式をみたすことがわかる。この方程式(ゼロ平均曲率方程式)をみたし、空間的曲面から時間的曲面に変化するような曲面は、極大面の崩壊として現れる曲面を含む。このような具体例を構成し、性質を調べることにより、この種の曲面を含む極大曲面のクラスの設定への足がかりとした。

B) 曲面の大域的な挙動に関して

- 非コンパクトな波面の大域的な幾何学を研究するには、リーマン多様体の完備性の概念を特異点を持つ場合に拡張する必要がある。研究代表者たちが「完備」と呼んでいる性質は(退化をゆるす)リーマン計量に関して常に定義されるが、一方、さまざまなクラスの曲面に対して別の意味の完備性(弱完備性とよんでいる)を導入してきた。これらの関係を考察した。具体的な曲面にたいしてこれらの関係を考察した。
 - ワイエルストラス表現公式を用いて、3次元双曲空間の平坦波面のエンドの挙動を考察した。完備、とくに特異点がエンドに集積しない場合はすでに調べられており、回転面のエンドに漸近することが知られているが、弱完備かつ特異点がエンドに集積する場合については、断面に外(内)サイクロイドが現れることが発見された。
 - フロントのガウス・ボンネ定理 ((E) 参照) の一般化を行い、その応用として、3次元アファイン空間の曲面に対する等積 Blaschke 法線の特異点に関する Bleeker-Wilson 型公式を得た。
 - 3次元双曲空間の平坦曲面も(特異点をもつが)ワイエルストラス型表現公式が知られているクラスである。とくに弱完備な平坦波面に対して双曲的ガウス写像の値分布を調べ、像が有界となるものの存在を示した。このことは完備有界な C^3 の null curve の存在定理の応用として得られる。
- C) 曲面の分類に関して
- 特異点を許す曲面の分類問題の準備として、3次元双曲空間内の平均曲率1を

もつ trinoid (3つのエンドをもつある種の曲面) の分類を与えた.

- 球面から2点を除いたリーマン面やトラス上の extended hyperbolic metric を分類することにより, 3次元ド・ジッター空間の CMC-1 2-noid の分類を行った.
- D) 曲面の特異点の挙動に関して
 - 3次元ユークリッド空間およびリーマン多様体への可微分写像の「交叉帽子」の微分幾何学的性質を調べた. とくに標準型を用いて特異点の微分幾何学的不変量を定義し, それらのうちいくつかは内的な不変量, またいくつかは外的な不変量であることを示した. このことを示すために, ある種の交叉帽子の等長変形を具体的に構成した.
- E) 特異点の微分幾何学に関して
 - 曲面のカスプ辺に曲率の概念 (特異曲率) を導入し, それと曲面のガウス曲率との関係を考察した. たとえば, ガウス曲率が非負の波面のカスプ辺の特異曲率が非正であることを示した. さらに特異曲率を用いて, 波面のガウス・ボンネの定理を確立し, その応用を与えた.
 - 3次元空間型の波面 (フロントル・フロント) の内的定式化として接続接束・フロントル束・フロント束の概念を導入し, この立場で波面とその単位法線ベクトル場との関係に対応するフロント束の双対性とその応用を研究した. とくにガウス・ボンネ (2種類現れる) とその双対という4つのガウス・ボンネの公式の応用を与えた.
 - 接続接束が空間型の超曲面として実現されるための条件, すなわち「フロントに対する超曲面論の基本定理」を得た. たとえば, このことから特異点をもつ定曲率曲面の実現定理を得ることができる.
 - これらの理論の高次元化の端緒として, 接続接束の特異点集合に曲率 (主曲率) を定義し, その挙動を調べた.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件; すべて査読あり)

1. Francisco Martin, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Flat surfaces in hyperbolic 3-space whose hyperbolic Gauss maps are bounded*, Revista Matematica Iberoamericana, 30 (2014), 309--316.
2. Leonor Ferrer, Francisco Martin, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *A construction of a complete bounded null curve in $C3$* , Kodai Mathematical Journal, 37 (2014), 59--96.
3. Masaru Hasegawa, Atsufumi Honda, Kosuke Naokawa, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, Selecta Mathematica, DOI:10.1007/s00029-013-0134-6 (Online First, 30. July, 2013)
4. Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Hyperbolic metrics on Riemann surfaces and space-like CMC-1 Surfaces in de Sitter 3-Space* in "Recent Trends in Lorentzian Geometry", M. Sanchez et al. (eds.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 26, pages 1--47, 2013.
5. Kentaro Saji, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts*, Journal of Geometric Analysis, vol. 22 (2012) 383--409, DOI 10.1007/s12220-010-9193-5
6. Shoichi Fujimori, Young Wook Kim, Sung-Eun Koh, Wayne Rossman, Heayong Shin, Hidenobu Takahashi, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, Seong-Deog Yang, *Zero mean curvature surfaces in $L3$ containing a light-like line*, Comptes Rendus de l'Academie Sci. Serie I. Mathematique, vol. 350 (2012) 975--978.
7. Huili Liu, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *The duality of conformally flat manifolds* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (N. S.), vol. 42 (2011), 131--152.
8. Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Applications of a completeness lemma in minimal surface theory to various classes of surfaces* Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 43 (2011), 191--199. Corrigendum: *Applications of a completeness lemma in minimal surface theory to various classes of surfaces*, Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 44 (2012), 617--618.
9. Kentaro Saji, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *A2-singularities of hypersurfaces with non-negative sectional curvature in Euclidean space* Kodai Mathematical Journal, vol. 34 (2011), 390--409.
10. Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman,

- Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *CMC-1 trinoids in H^3 and metrics of constant curvature one with conical singularities on S^2* , Proceedings of Japan Academy, vol. 87, Ser. A (2011), 144-149.
11. Kentaro Saji, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Singularities of Blaschke normal maps of convex surfaces*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique, vol. 348 (2010) 665-668.
 12. Kentaro Saji, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, Osaka Journal of Mathematics, vol. 47 (2010) 591-607.
 13. Francisco Martin, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Complete bounded holomorphic curves immersed in C^2 with arbitrary genus*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 137 (2009), 3437-3450.
 14. Shoichi Fujimori, Wayne Rossman, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada and Seog-Deong Yang, *Spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter 3-space*, Communications in Analysis and Geometry, vol. 17 (2009) 383-427.
 15. Shoichi Fujimori, Wayne Rossman, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada and Seog-Deong Yang, *New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space*, Results in Mathematics, vol. 56 (2009) 41-82.
- [学会発表] (計 5 件)
1. 山田光太郎, カस्प辺の微分幾何学的振る舞い, 部分多様体論湯沢, 2013 年 11 月 23 日, 湯沢グランドホテル
 2. 山田光太郎, カस्प辺の微分幾何学的振る舞い, Geometry and Something 2013 年 11 月 4 日, 福岡大学セミナーハウス
 3. Kotaro Yamada, *Duality of wave fronts and applications*, Progress in Surface Theory, 08. May 2010, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
 4. Kotaro Yamada, *New Examples of maximal surfaces in Lorentz Minkowski 3-space*, 07. Sept. 2011, Universidad de Granada
 5. 山田光太郎, *Maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space*, Geometry and Something, 2009 年 11 月 21 日, 福岡大学セミナーハウス

- [その他]
 ホームページ等
<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/>
6. 研究組織
 (1) 研究代表者:
 山田 光太郎 (Kotaro Yamada)
 (九州大学大学院数理学研究院・教授, 2009 年 4 月から 2009 年 9 月;
 東京工業大学・大学院理工学研究科・教授, 2009 年 10 月から)
 研究者番号: 10221657
- (2) 研究分担者
 (3) 連携研究者
- 梅原 雅顕 (Masaaki Umehara)
 (大阪大学・大学院理学研究科・教授, 2009 年 4 月から 2011 年 3 月;
 東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授, 2011 年 4 月から)
 研究者番号: 90193945
 - Wayne Rossman (神戸大学理学部・教授)
 研究者番号: 50284485
 - 吉田 正章 (Masaaki Yoshida; 2009, 2010, 2011 年度)
 (九州大学・大学院数理学研究院・教授)
 研究者番号: 30030787
 - 黒瀬 俊 (Takashi Kurose)
 (福岡大学理学部・教授, 2009 年 4 月から 2011 年 3 月まで;
 関西学院大学理学部・教授, 2011 年 4 月以降)
 研究者番号: 30215107
 - 國分 雅敏 (Masatoshi Kokubu)
 (東京電機大学工学部・教授)
 研究者番号: 50287439
 - 藤森 祥一 (Shoichi Fujimori)
 (福岡教育大学教育学部・講師, 2009 年 4 月から 2011 年 3 月;
 岡山大学理学部・准教授 (2011 年 4 月から)
 研究者番号: 00452706
 - 川上 裕 (Yu Kawakami; 2010 年度以降)
 (九州大学大学院数理学研究院・助教, 2010 年 4 月から 2011 年 3 月;
 山口大学理学部・講師, 2011 年 4 月以降)
 研究者番号: 60532356
 - 本田 淳史 (Atsufumi Honda; 2013 年度)
 (都城工業高等専門学校・講師)