

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月20日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21340017

研究課題名（和文） 特異渦構造の運動を通じた流体乱流現象の力学と統計の高次結合

研究課題名（英文）

Towards a mathematical theory of fluid turbulence via singular vortex dynamics

研究代表者

坂上 貴之（SAKAJO TAKASHI）

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：10303603

研究成果の概要（和文）：乱流の数学理論構築に向けて、流体運動を記述する偏微分方程式の「散逸的弱解」とよばれる解の性質を、流れ場の回転場を表す渦度とよばれる量が点や線に分布している場合の特異渦構造の力学として調べることで、渦力学を通じた乱流理論の可能性を探究した。主な結果として、 α 点渦系と呼ばれる系の α ゼロの極限で得られる自己相似衝突解が二次元乱流理論で重要な性質とされる特異エンストロフィー散逸をうむ散逸的弱解の一つであることがわかった。

研究成果の概要（英文）：It has been pointed out that dissipative weak solutions of the hydrodynamic equations plays an important role in understand the statistical theory of turbulence. But the existence of such a singular solution has not yet proven and its dynamical property is uncertain. In the present project, we successfully obtain a self-similar collapsing solution of α point vortex system. This is a dissipative weak solution of 2D Euler equation, which acquires one of the important properties observed in 2D turbulence.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2012年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
総計	7,500,000	2,250,000	9,750,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学一般（含確率論，統計数学）

キーワード：乱流，点渦，渦層，散逸的弱解，オイラー方程式，オイラー α 方程式

1. 研究開始当初の背景

数理論理学における難問の一つに乱流現象の数学理論の構築がある。乱流研究の中心は支配方程式であるナビエ-ストークス方程式のコルモゴロフ理論に基づく次元解析、

および大規模数値計算による非平衡統計理論であるが、現在では流体運動を大（無限）自由度の力学系としてとらえ、その非線形力学系としての性質と乱流の統計性質をどう結びつけるかが重要な問題と考えられている。

これに対して、近年、Duchon, Robert およびEyinkらの研究により、三次元オイラー方程式の弱解で、解に滑らかさが無いため本来保存されるべきエネルギーが散逸する“散逸的弱解”と呼ばれるものが、乱流統計則を実現する流れの数学的表現であるとの指摘がなされている。一般に乱流理論では動粘性率ゼロの特異極限（レイノルズ数無限大の極限に相当）での統計則を扱うが、彼らはこれが単なる概念的理解ではなく、実際にオイラー方程式の散逸的弱解が動粘性率ゼロ極限の乱流とみなせるという証拠を示したため、現在ではオイラー方程式の散逸的弱解の理論的研究が乱流の力学理論と統計理論を結ぶキーワードであると考えられている。しかし、三次元オイラー方程式の弱解の構成は未解決問題であること、さらに散逸的弱解の物理的・力学的意味づけが明らかでないなど、理論の完成にはほど遠い状況である。

また、DuchonとRobertは同じ論文で二次元オイラー方程式に対しても散逸的弱解の存在を指摘している。この弱解と二次元乱流統計の関係は明らかではないが、何らかの関係を持つことが期待されている。一方で二次元非粘性流れについては、渦度が δ 関数的に分布した“点渦”や渦度が線上に分布した“渦層”などの特異渦構造を持つ解が知られ、これらの数学的・数値的研究が進んでいる。渦層解と点渦はそれぞれ二次元オイラー方程式、オイラー α 方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式の弱解であることが知られており、こうした背景から二次元乱流については偏微分方程式の散逸的弱解としての特異渦運動の力学系理論を基点として、その非平衡統計理論を明らかにできる可能性があると思われる。

さらに近年、低温物理学において、液体ヘリウムの超流動状態に現れる乱流状態(超流動乱流)と古典的な乱流との類似性が指摘

されている。超流動流体の巨視的(量子)波動関数を記述する偏微分方程式はGross-Pitaevskii方程式(GP方程式)であるが、その解の一つとして量子化された流れの循環を持つ“量子渦糸”が知られ、超流動乱流ではこの量子渦糸系の相互作用によるトポロジーの変化が非平衡定常状態生む手がかりと見なされている。一方でGP方程式は非線形シュレーディンガー方程式であり、その数学的性質については多くの成果が知られているが、これらの結果と超流動乱流を結びつける研究は多くない。

2. 研究の目的

本研究課題では、「偏微分方程式の散逸的弱解＝特異渦構造の(特異的)運動」をキーワードにして、乱流における非線形力学と非平衡統計理論の高次結合を目指すものである。具体的には以下の三つの課題に取り組む。

(1) 点渦系の力学系理論と点渦統計：大自由度点渦系の運動と統計の関係を力学系理論と数値計算により明らかにする。さらに、いくつかの点渦が有限時間で一点に衝突する「点渦衝突解」の数理的構造を力学系理論(衝突多様体理論など)により明らかにし、オイラー α 方程式の散逸的弱解としての点渦系の運動との関連を論じる。

(2) 渦層運動と乱流統計理論の接点の探求：これまでの渦層の長時間挙動と特異点形成の研究を進展させ、渦層が生成する乱れた流れの統計則を理論的・数値的に研究する。渦層はオイラー方程式の弱解であるが、渦層解が滑らかである限りそのエネルギーは保存され散逸的ではない。一方で渦層には有限時間で曲率が発散するという特異点の生成が知られており、この特異点形成時にエネルギーが散逸する可能性がある。こうした観点から特異

点形成と散逸的弱解の関係について明らかにする。

- (3) GP 方程式の爆発解の構造と量子渦糸乱流の研究：超流動乱流の運動を記述する GP 方程式の散逸的弱解と量子渦糸解の作る非定常統計の関係を調べる。さらに、GP 方程式に現れる爆発解の数学的構造と、量子渦糸解の作る非平衡乱流状態（量子乱流）の関係を調べる。

3. 研究の方法

研究の背景で述べたように特異渦構造の運動に関しては様々な理論的・数値的成果の蓄積があるが、それらを偏微分方程式の散逸的弱解と見なして乱流運動の理解につなげるという研究はこれまでにあまりなく、最終的な目的に到達するルートについては明らかでない。そこで、本研究ではそれぞれの分野で専門的な知識をもつ連携研究者とともに以下のプロジェクト(1)-(4)を同時進行させ、それらの知見の統合を図りつつ最終目的に到達することを目指す。なお、研究を推進した結果、これらプロジェクトが最終目的に到達しない場合に備えて、初年度から関連する話題の専門的知識の提供を受ける場を積極的に設け、各プロジェクト間の連携を密にすることで、プロジェクトの学術的展開の可能性を継続的に模索するとともに、場合によってはサブプロジェクト化・研究グループの再編も検討する。

- (1) 多自由度点渦系の力学系理論と点渦統計：多自由度点渦系の非線形力学系理論とオンサーガーによる点渦統計理論の関係を明らかにする。また、点渦系の有限時間衝突解とオイラー α 方程式の散逸的弱解の関係について、ハミルトンエネルギー

散逸と衝突多様体の位相構造に注目して研究する

- (2) 渦層運動と乱流統計理論の接点の探求：これまで研究代表者が行ってきた渦層の研究を発展させ、渦層が生成する乱流場の特性を理論的・数値的に研究する。また、渦層運動における曲率特異点の形成とエネルギー散逸の関係について研究する。本プロジェクトでは乱流理論を専門とする松本剛博士との共同研究を行うことで、実質的な研究につなげる。
- (3) G P 方程式の爆発解の構造と量子渦糸乱流の研究：超流動乱流の運動を記述する G P 方程式の散逸的弱解と量子渦糸解の作る非平衡統計則の関係について理論的・数値的に考える。G P 方程式の数値的研究は坂上が取り組み、数学理論の展開においては非線形シュレーディンガー方程式を専門とする名和範人博士と赤堀公史博士との共同研究によりその解の数理的構造について研究を進める。
- (4) 乱流と散逸的弱解に関するサーベイノートの完成：本研究計画の立案に先立ち研究代表者（坂上）と連携研究者（名和・松本）は乱流理論と散逸的弱解理論などに関して、これまでに知られている成果やそれらの研究のこれからの発展の可能性について過去数年にわたり機会を見つけては緊密に議論を続けてきた。その過程で「乱流と散逸的弱解」に関する研究サーベイが可能なレベルにまで到達しつつある。本研究計画の支援により、この議論を加速させ今後の展望を探るサーベイノートを完成させる。

4. 研究成果

研究目的とその方法に基づき各プロジェクトについては以下の成果を得た。

(1) 初期においては点渦統計と点渦力学に関する様々な研究に取り組んだ.

① 点渦平均場近似方程式sinh-ポアソン方程式の数値解析手法を確立し, 領域の連結性や配置, また極限における点渦への様子などを詳細に調べた.

② 球面三点渦の有限時間衝突解に対して衝突多様体を定義し, その位相的正則可能性について調べた. その結果衝突多様体の近傍では平面三点渦衝突解と力学が同じであることがわかった.

③ オイラー α 方程式の点渦力学(α 点渦系)の研究については, $\alpha=0$ に対応するEuler方程式の点渦力学において三点衝突解が得られる場合と同条件下で, α 点渦系の三体問題の解を調べた. その結果, 三点 α 点渦は一直線に並んだ初期値から始めると, 自己相似解に漸近して発散していく解となることがわかった. この解の $\alpha \rightarrow 0$ の極限では, α 点渦は無遠方から自己相似的に原点に近づき衝突した後, 再び自己相似的に無限遠点に飛び去っていく解に収束することを証明した. さらに, この特異解にそって超関数の意味でエネルギー散逸率はゼロにエンストロフィーは特異散逸することがわかった. オイラー方程式の解のエンストロフィー散逸は二次元乱流におけるエネルギースペクトルにおけるエンストロフィーカスケードに対応する慣性領域の出現と関係が深いとされ, α 点渦系の特異解のさらなる研究が二次元乱流の理解につながることを示唆された. ここで得られたエンストロフィーを特異散逸させる三点衝突解は, 初期値やパラメータを変更した時にも得られることがわかった. これは, $\alpha=0$ に対応する点渦系の挙動とは全く異なる挙動であり, $\alpha \rightarrow 0$ の極限解が二

次元乱流の統計性質を考える上での二次元オイラー方程式のエンストロフィー散逸弱解として重要であるということがはっきりしてきた. その後, この衝突解をN体問題に拡張して数値計算を行っている.

(2) 渦層における特異性の研究については, 以下の課題に取り組んだ.

① 境界層の生成を伴う二次元の乱れた流れ現象を調べた. まずは, 乱流遷移過程を調べる上で重要とされ, 長年その存在が指摘されている平面Couette流における非自明定常解の存在について数値的に強くサポートする結果を得た. また, 長時間発展の数値計算を試みた結果, 流れは乱れた遷移状態を持つものの最終的には大きな渦だけがのこる比較的穏やかな解に収束することもわかり, 渦層の生成をもなうような流れで乱流的な振る舞いを持つ解を数値的に構成することができなかった.

② α 渦層について数値コードを開発を行った. オイラー α 方程式は通常二次元全空間で考えることが多いが, 特異点の形成と言った精密な数値計算を行うためには, 渦層の問題を周期境界条件で考える必要がある. オイラー α 方程式にはヘルムホルツ作用素のグリーン関数が現れるが, この関数表示を周期境界条件で陽的に求めることができず, これを精密な数値計算を実現する上での困難になった. フーリエ空間での多重極展開法の適用などを試みたが本研究計画期間中にコードの完成を見ることができず今後の検討課題となった.

(3) 超流動乱流とGP方程式については, 初期の検討を通じて, 超流動乱流が我々のターゲットとする枠組みでは扱えない問題であるということが次第に明らかになっ

た。一方で、その研究の過程で流体粒子の軌道平均をとることで得られる分散項を含む流体方程式（オイラー α 、ナビエ-ストークス α 方程式）が本研究課題を扱うモデル方程式として有益であるということがわかり、このプロジェクトは(1)に統合され、その結果が(1)-IIIの結果につながった。

- (4) 「乱流とオイラー方程式の散逸的弱解」に関するサーベイノートは乱流流れ場を方程式によらない確率過程論だけに基づく統計的乱流理論として定式化することで、現在知られているコルモゴロフの乱流理論や流れ場の滑らかさとエネルギー散逸について述べたオンサーガーの予想の合理的な数学的記述が可能であることがわかった。また、従来のKolmogorov理論で採用されてきた定義ではなく、Karman-Howarth-Monin関係式をエネルギー散逸率の公理として採用することで、サンプル流れ場を構成する流体方程式の候補としてオイラー方程式やナビエ-ストークス方程式の研究の現状を捉え、将来に数学が明らかにすべき問題も明らかになってきた。中でも三次モーメントやエネルギースペクトルの統計則に関する関数解析学的な位置づけがあきらかになった。当初、簡単なサーベイノートとしてまとめる予定であったが、思いの外研究が進んだために、本研究結果は学術雑誌であるNonlinearityからの招待論文となり現在最終版を執筆中である。
- (5) 本研究課題に関連する研究情報の交換および成果発表のためにいくつかの研究集会を実施した。(1)「地球環境流体研究と数理科学ワークショップ」（文部科学省共催）(2) RIMS共同研究「偏微分方程式の背後にある確率過程と解の族が示す統

計力学的な現象の解析」(3)「流体乱流の力学と統計—複雑系科学からのアプローチ」合宿型式セミナー（物質・デバイス領域共同研究・ナノシステム科学拠点事業との共催）

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計7件)

- ① 坂上貴之, 二次元 Euler- α 方程式の弱解の特異極限解とその性質, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1823 巻, 2013, 54-71.
- ② T. Sakajo, Anomalous enstrophy dissipation via the self-similar triple collapse of the Euler-alpha point vortices, Nankai Series in Applied Mathematics and Theoretical Physics, 査読無, vol. 10, 2013, 155-169.
- ③ T. Sakajo, Instantaneous energy and enstrophy variations in Euler-alpha point vortices via triple collapse, Journal of Fluid Mechanics, 査読有, vol. 702, 2012, 188-214, doi:10.1017/jfm.2012.172
- ④ K. Ohkitani and T. Sakajo, Corrigendum: Oscillatory damping in long-time evolution of the surface quasi-geostrophic equations with generalized viscosity: a numerical study, Nonlinearity, 査読有, vol. 25, 2012, 2181-2202, doi:10.1088/0951-7715/25/7/2181
- ⑤ K. Ohkitani and T. Sakajo, Oscillatory damping in long-time evolution of the surface quasi-geostrophic equations with generalized viscosity: a numerical study, Nonlinearity, 査読有, vol. 23, 2010, 3029-3051.
- ⑥ 坂上貴之, 球面点渦相互作用の高速 Tree-code アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録「オイラー方程式の数理: 渦運動 150 年」, 査読無, 1642 巻, 2009, 184-196.
- ⑦ T. Sakajo, From generation to chaotic motion of a ring configuration of vortex structure on a sphere, Theor. Comput. Fluid Dyn., 査読有, vol. 24, 2009, 151-156.

〔学会発表〕(計9件)

- ① 坂上貴之, Euler- α 方程式の点渦衝突によるエンストロフィー散逸, 京都大学数理解析研究所共同研究集会「流体と気体の数学解析」, 2012年7月6日, 京都大学数理解析研究所
- ② 坂上貴之, 二次元 Euler- α 流れの点渦衝突と特異エンストロフィー散逸, 北海道大学複雑系セミナー, 2012年6月11日, 北海道大学
- ③ 坂上貴之, α 点渦系の三体衝突によるエンストロフィー散逸, 日本数学会年会, 2012年3月28日, 東京理科大学
- ④ 坂上貴之, Enstrophy dissipation in Euler alpha point vortices via triple collapse, 北海道大学北東解析研究集会, 2012年2月17日, 北海道大学
- ⑤ 坂上貴之, 二次元 Euler- α 方程式の弱解の特異極限解とその性質について, 京都大学数理解析研究所共同研究「偏微分方程式の背後にある確率過程と解の族が示す統計力学的な現象の解析」, 2011年12月20日, 京都大学数理奇跡研究所.
- ⑥ T. Sakajo, Enstrophy dissipation in Euler-alpha point vortices via triple collapse, Emerging Topics on Differential Equations and their Applications- Sino-Japan Conference of Young Mathematicians, 2011年12月7日 Nankai University, China, Invited speaker.
- ⑦ 坂上貴之, 三点渦衝突によるハミルトンエネルギーの変動, 大阪大学大学院基礎工学研究科 流体科学セミナー, 2011年8月29日, 大阪大学.
- ⑧ 坂上貴之, Energy variations of a point-vortex dynamics via triple collapse, 東北大学大学院情報科学研究科 仙台シンポジウム, 2011年8月17日, 東北大学.
- ⑨ 坂上貴之, 流体方程式の特異点形成に関する数学的・数値的研究, 東京工業大学グローバルCOE計算世界観の深化と展開シンポジウム, 2009年12月31日, 東京工業大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坂上 貴之 (SAKAJO TAKASHI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：10303603

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者

名和 範人 (NAWA HAYATO)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：90218066

松本 剛 (MATSUMOTO TAKESHI)
京都大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：20346076

赤堀 公史 (AKAHORI TAKAHUMI)
静岡大学・大学院数理システム工学科, 准教授
研究者番号：90437187