様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2009～2013
課題番号：２１３４００２９
研究課題名（和文）超幾何系およびガルニエ系の漸近解析

研究課題名（英文）Asymptotic analysis for hypergeometric systems and Garnier systems

研究代表者
竹井　義次（TAKEI, Yoshitsugu）

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：００２１２０１９
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　6,400,000円、（間接経費）　　1,920,000円

研究成果の概要（和文）：完全WKB解析の多変数化を目指して超幾何系やガルニエ系等の完全積分可能系を完全WKB解析的な視点から考察し、「変わり点の交差」という現象が完全積分可能系やそれを制限して得られる高階常微分方程式のストークス幾何の決定に重要な役割を果たすこと、線型の完全積分可能系の場合にはPearcey系が変わり点の交差現象が起きる点での標準形を与えること、等の基本的な諸結果が得られた。また、関連する完全WKB解析の基礎理論の整備に関しても、差分方程式を用いた線型方程式やパンルヴェ方程式のVoros係数の解析が飛躍的に進展した。

研究成果の概要（英文）：To generalize the exact WKB analysis to multidimensional problems, we consider completely integrable systems such as hypergeometric systems and Garnier systems from the viewpoint of the exact WKB analysis. We obtain the following fundamental results: "Coalescing phenomena of turning points" play an important role in determining the Stokes geometry of completely integrable systems as well as of higher order ordinary differential equations obtained as their restriction, in the case of linear completely integrable systems the Pearcey system gives a normal form at a point where a coalescing phenomenon of turning points occurs, and so on. Concerning the consolidation of the theory of exact WKB analysis, we also make a big progress in the analysis of the Voros coefficients of linear equations and Painleve equations by using the method of difference equations.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：解析学　関数方程式論　漸近解析　代数解析　超幾何系　ガルニエ系　パンルヴェ階層　ＷＫＢ解析

１．研究開始当初の背景

Borel 総和法に基礎を置く完全 WKB 解析は、1980 年代の Voros と Silverstone の先駆的仕事に始まり、Pham のグループや本計画関係者グループ等の貢献により、２階線型常微分方程式の場合にはほぼ満足すべき理論が完成した。その後、主として我々のグループにより完全 WKB 解析の高階方程式や非線型方程式への拡張が図られ、例えば本研究の前身となった科学研究費補助金基盤研究(C)「パンルベ階層の接続問題と WKB 解析」（2006 年度～2008 年度，課題番号：18540174, 研究代表者：竹井義次）において、少なくとも局所理論については高階の非線型方程式であるパンルヴェ階層にまで理論の一般化が達成された。

しかし、Berk-Nevins-Roberts（J. Math. Phys., **23**(1982)）により指摘されたように、高階方程式の大域理論に関しては「新しいストークス曲線」と「仮想的変わり点」の取扱いという厄介な問題が存在する。この問題に関連して、次の興味深い事実が成り立つ。

(1) Berk 達が新しいストークス曲線の存在を示す際に用いた３階の線型方程式（以下 "BNR 方程式" と呼ぶ）は、ある２変数合流超幾何系（"Pearcey 系" と呼ばれる）の一方の変数を特殊化して得られる常微分方程式である。

(2) 高階パンルヴェ方程式に対して新しいストークス曲線が存在することを示した西川の仕事（Stud. Appl. Math., **119**(2007)）で用いられた高階パンルヴェ方程式も、パンルヴェ方程式の多変数版であるガルニエ系の適当な１次元複素直線への制限として得られる（Koike, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B2**(2007) 及び ibid, **B5**(2008)）。

これらの結果は、こうした新しいストークス曲線や仮想的変わり点が、代表的な偏微分方程式系である超幾何系やガルニエ系の漸近解析と関係するのではないかとの期待を抱かせる。

そもそも、完全 WKB 解析の多変数化、すなわち偏微分方程式（系）への拡張は、それ自体非常に重要かつ魅力的なテーマである。こうした状況を受けて、高階方程式の新しいストークス曲線や仮想的変わり点の問題への応用を念頭に置きながら、超幾何系やガルニエ系の漸近解析を主題とする本研究を開始した。

２．研究の目的

この目的に向けての一つの手掛かりは、「変わり点の交差」という現象である。Pearcey 系に対する予備的考察によって、Pearcey 系に対しては実際に変わり点の交差という現象が起こっており、これが Pearcey 系の切り口として現れる BNR 方程式の仮想的変わり点の出現と密接に関係していることが既に確認されている。そこで、本研究の具体的目標として以下の４項目を設定する。

(1) 上で述べた「変わり点の交差」という現象がどの程度普遍的に起こり得るのかを、いくつかの具体的な超幾何系やガルニエ系の解析を通じて調べること。

(2) 一般の（大きなパラメータを含んだ）線型偏微分方程式系に対する基礎理論の整備。また、変わり点の交差という現象をこうした一般論の枠組の中で系統的に論じること。さらに、できればこうした考察を、非線型偏微分方程式系であるガルニエ系にまで拡張する。

(3) 上記(1), (2)で得られた超幾何系やガルニエ系（の具体例）に対する結果、中でも変わり点の交差現象についての知見を、BNR 方程式をはじめとする高階常微分方程式の新しいストークス曲線や仮想的変わり点の問題に応用すること。

(4) 常微分方程式に対する完全WKB解析の基礎理論の一層の整備。新しいストークス曲線の出現と密接に関連する高階方程式の WKB 解の Borel 総和可能性の問題や、WKB 解の Borel 変換の動かない特異点の解析など、常微分方程式、とりわけ非線型の（高階）パンルヴェ方程式の完全 WKB 解析の基礎理論には、いくつか残された課題が存在する。偏微分方程式系に対する完全 WKB 解析の理論整備の進展を適宜参考にしつつ、常微分方程式に対する完全 WKB 解析の基礎理論の一層の整備を図る。

こうした具体的目標が多少なりとも達成されれば、超幾何系やガルニエ系を扱う「多変数特殊函数論」の構築と同時に、Ramis, Sibuya, Schäfke, Balser, Braaksma, Costin といった人達によって発展した従来の常微分方程式に対する漸近解析の多変数化に向けての大きな一歩になるであろう。

３．研究の方法

完全 WKB 解析は、WKB 解の Borel 変換の解析を通じて、超局所解析学と密接に関係する。基本的には理論的な考察が中心となるが、その一方、具体的な方程式（系）の解析にあたっては、変わり点やストークス曲面を図示することが本質的な役割を果たし、そのためコンピュータの利用も必要不可欠である。そうした面から、超局所解析学の専門家でありコンピュータの扱いにも慣れた連携研究者の青木貴史、小池達也の両氏と緊密に連絡を取ることは本研究にとって非常に重要である。若い大学院生達の協力も積極的に仰ぎながら、京都大学数理解析研究所で定期的に行うセミナーを中心に随時情報を交換しつつ、共同研究という形で研究を進めて行く。また、完全 WKB 解析の第一人者であり共同研究者でもある河合隆裕（京大名誉教授）氏をはじめとして、国内外の研究協力者とも日常的に研究交流を図っていく予定である。

以下では、上記具体的目標(1)～(4)のそれ

ぞれの項目について、実際にどのように研究を進めて行くのか、その方針を簡単に述べる。

(1) 超幾何系の解は一般に積分表示式を持つ。他方、ガルニエ系はモノドロミー保存変形を通じて線型微分方程式系（いわゆる、ラックス対）と関係している。こうした積分表示式やラックス対を利用して、Pearcey 系をはじめとするいくつかの具体的な超幾何系やガルニエ系に対して、その完全 WKB 解析的構造や変わり点の交差現象がどの程度起こり得るのかを詳細に調べる。

(2) 線型偏微分方程式系に対する基礎理論の整備においては、変わり点やストークス曲面、接続公式といった完全 WKB 解析の基本的な概念を確立することが中心課題である。また、変わり点の交差現象を一般論の枠組の中で論じるためには、WKB 解析的な変換論が一つの鍵になるのではないかと思われる。

(3) (1), (2)で得られた結果を高階常微分方程式の問題に応用するにあたっては、新しいストークス曲線上での WKB 解の接続公式がこの視点からどのように理解できるかどうかが一つの試金石である。また、一般に無限個現れる「余分の」新しいストークス曲線の問題も、この視点から考察してみたい。

(4) WKB 解の Borel 変換の動かない特異点の解析では、Voros 係数が重要な役割を演じる。この Voros 係数の解析に、方程式が含んでいるパラメータに関するある種の差分方程式が有効であることが最近の研究で明らかになった。差分方程式を利用した Voros 係数や動かない特異点の解析をさらに推し進めると同時に、その高階方程式や非線型方程式への一般化についても考察したい。

４．研究成果

上記具体的目標のうち、特に(1), (2), (4)については大きな進展が得られた。以下、(1)～(4)の各項目に関して、得られた具体的成果を述べる。

(1) 大学院生（当時）の廣瀬三平君によるコンピュータを用いた数値計算の結果、Pearcey 系のストークス幾何の構造がほぼ解明された。Pearcey 系の場合、変わり点の交差現象は原点でのみ起こり、そこで変わり点集合はカスプ状の特異点を持つ。しかも、Berk 達により発見された BNR 方程式の新しいストークス曲線は、変数の数を増やして Pearcey 系に拡張して考えれば、通常のストークス曲面の一部としてその中に自然に埋め込まれていることも明らかになった。さらに、(1,4)型の２変数超幾何系についても、変わり点の交差現象が有限個の点（今の場合、３点）で起こり、これらの点がストークス幾何の構造を決める際に重要な役割を果たすことが示された。これらの結果は、変わり点の交差現象を通じて、超幾何系やそれを制限して得られる高階常微分方程式のストークス幾何の構造が解析可能であることを強く示唆する。

(2) さらに、一般の２変数線型完全積分可能系に対して、変わり点の交差現象が起きる点での標準形が Pearcey 系により与えられるという非常に興味深い結果が、廣瀬君の学位論文で証明された。これにより、線型完全積分可能系に対する完全 WKB 解析の一般論の中で、変わり点の交差現象や Pearcey 系の果たす役割がほぼ明らかになったと考えられる。なお、廣瀬の結果の非線型方程式系への拡張として、非線型の２変数完全積分可能系の場合、変わり点の交差現象が起きる点での標準形は最も退化した２変数ガルニエ系により与えられるという予想も得られた。この予想は勾配カタストロフの点における KdV 方程式の漸近解の挙動に関する Dubrovin の結果（Comm. Math. Phys., 267(2006)）との関連も期待され、現在その証明に取り組んでいるところである。

(3) 上記(1)で述べた(1,4)型の２変数超幾何系に対する解析では、そのストークス曲面が、第２変数を固定して得られる３階常微分方程式の新しいストークス曲線全体を生成することが同時に確かめられた。これは、単に完全積分可能系に拡張するだけでは、高階常微分方程式の「余分の」新しいストークス曲線の問題が解決される訳ではないことを意味する。有効な新しいストークス曲線のみを如何に取り出すかは今後の課題である。

(4) 差分方程式を利用した線型方程式の Voros 係数の解析は飛躍的に進展し、Whittaker 方程式の Vors 係数の決定や、超幾何方程式に対する青木-反田の結果、中間畳み込みの手法も援用した小池-岩木の解析、等の諸結果が得られた。また、小池、河合、神本との共同研究で得られたいくつかの完全 WKB 解析的な変換論も、単純極に由来する WKB 解の動かない特異点や Voros 係数の解析に有効である。さらに、非線型のパンルヴェ方程式に関しても、大学院生（当時）の岩木耕平君が、第２および第３パンルヴェ方程式の Voros 係数や１パラメータ解の動かない特異点を具体的に解析することに成功した。岩木君はまた、彼の学位論文において、任意のパンルヴェ方程式が、２つの変わり点を結ぶストークス線分の近傍では第２パンルヴェ方程式に、さらにループ状のストークス線分の近傍では第３パンルヴェ方程式にそれぞれ変換可能であることも証明した。岩木君のこれらの結果は、非線型のパンルヴェ方程式やガルニエ系に対する完全 WKB 解析の基礎理論の確立に向けた橋頭堡と考えられる、非常に重要な成果である。

残念ながら、こうして得られた新しい知見を超幾何系やガルニエ系の具体的な接続問題へ応用することや、多変数化の視点から高階常微分方程式の新しいストークス曲線の問題を完全に解決することは実現できなかったが、少なくとも線型の完全積分可能系に対する完全 WKB 解析の理論の大枠はほぼ構築

されたと考えられる。上述のような今回の研究で実現できなかった点や、非線型の完全積分可能系に対する完全 WKB 解析の一般論の構築は、今後の大きな課題である。

なお、本研究課題と密接に関連するいくつかの興味深い研究成果が、本研究と並行する研究（主に共同研究）の中で得られた。最後に、それらの関連する研究成果についても簡単にまとめておく。

〔関連する研究成果〕

(5) 線型常微分方程式の場合、単純変わり点に加えて、２重変わり点や単純極における標準形への変換論が知られている。こうした線型方程式に対する結果を、パンルヴェ方程式に拡張することに成功した。将来、非線型の完全積分可能系に対する完全 WKB 解析の一般論を建設する際には、この結果が大きな参考になるものと思われる。

(6) 高階常微分方程式の WKB 解の Borel 総和可能性の問題は、新しいストークス曲線の問題とも関係するこの分野の懸案の問題の一つである。この問題の解決への第一歩として、連携研究者の小池氏と共同で、２階の非斉次方程式の形式解に対する Borel 総和可能性の問題を解決した。

(7) 大学院生（当時）の鈴木克彦君と共同で、ある種の摂動項を付加した線型常微分方程式の WKB 解については、単に Borel 総和可能性だけでなく多重総和可能性を考慮する必要があることを具体例を用いて示した。完全 WKB 解析の枠組が何で規定されているのかという根元的な問題と絡んで、本研究課題とも深いところで関係する結果だと考えられる。

(8) 本研究課題で扱った完全積分可能系とは少し方向性は異なるが、完全 WKB 解析の一つの多変数化として、単独の（熱方程式型の）偏微分方程式の初期値問題の形式解の Borel 総和可能性の問題を O. Costin, H. Park 氏と共同で研究し、形式解の Borel 総和可能性や（特別な場合は）Ecalle の意味での resurgence 性などの結果が得られた。

(9) 濱田雄策氏や大鍛治隆司氏との共同研究では、複素領域での偏微分方程式の初期値問題を古典的な方法で論じた。完全 WKB 解析と直ぐに関係する訳ではないが、ある種の偏微分方程式の解である WKB 解の Borel 変換の resurgence 性等の性質を論じる際には、これからこの古典的な方法が（少なくとも理念的には）参考になる可能性は決して低くないものと思われる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２１件）

[1,2] S. Kamimoto, T. Kawai and Y. Takei, Exact WKB analysis of a Schrödinger equation with a merging triplet of two simple poles and one simple turning point. I & II, Advances in Mathematics, 査読有, 260 巻, 2014, 458-564 & 565-613, DOI: 10.1016/j.aim.2014.02.026 & 10.1016/j.aim.2014.02.028

[3,4] Y. Hamada, T. Okaji and Y. Takei, Le prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy pour un certain opérateur différentiel à coefficients polynomiaux. II & III, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 査読有, 14 巻, 2013, 113-148 & 149-163, DOI: 10.1007/s11784-014-0152-9 & 10.1007/s11784-014-0153-8

[5] T. Aoki and M. Tanda, Characterization of Stokes graphs and Voros coefficients of hypergeometric differential equations with a large parameter, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B40 巻, 2013, 147-162

[6] T. Koike and Y. Takei, Exact WKB analysis of second-order non-homogeneous linear ordinary differential equations, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B40 巻, 2013, 293-312

[7] Y. Takei, On the role of the degenerate third Painlevé equation of type (D8) in the exact WKB analysis, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B37 巻, 2013, 211-222

[8] Y. Hamada, T. Okaji and Y. Takei, Problème de Cauchy et Goursat analytique, Publications of RIMS, Kyoto University, 査読有, 48 巻, 2012, 139-181, DOI: 10.2977/PRIMS/65

[9] O. Costin, H. Park and Y. Takei, Borel summability of the heat equation with variable coefficients, Journal of Differential Equations, 査読有, 252 巻, 2012, 3076-3092, DOI: 10.1016/j.jde.2011.11.026

[10] T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On the exact WKB analysis of higher order simple-pole type operators, Advances in Mathematics, 査読有, 228 巻, 2011, 63-96, DOI: 10.1016/j.aim.2011.05.010

[11] T. Aoki and N. Honda, Geometric properties of the Riemann surfaces associated with the Noumi-Yamada systems with a large parameter, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有,

63 巻, 2011, 1085-1119,
DOI: 10.2969/jmsj/06341085

[12] Y. Takei, On the turning point problem for instanton-type solutions of Painlevé equations, Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDEs; Generalized Borel Summation, Vol. II (会議録), Edizioni della Normale, Pisa, 査読有, 2011, pp. 255-274, http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-88-7642-377-2_5

[13] T. Kawai and Y. Takei, WKB analysis of higher order Painlevé equations with a large parameter. II, Publications of RIMS, Kyoto University, 査読有, 47 巻, 2011, 153-219, DOI: 10.2977/PRIMS/34

[14] T. Koike and Y. Takei, On the Voros coefficient for the Whittaker equation with a large parameter, Publications of RIMS, Kyoto University, 査読有, 47 巻, 2011, 375-395, DOI: 10.2977/PRIMS/39

[15] T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On the structure of higher order simple-pole type operators in exact WKB analysis, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有, 53 巻, 2010, 249-276,
https://www.jstage.jst.go.jp/article/fesi/53/2/53_2_249/_article,

[16] S. Kamimoto, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei, On the WKB theoretic structure of a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point, Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, 50 巻, 2010, 101-164,
http://projecteuclid.org/euclid.kjm/1271187741

〔学会発表〕(計２０件)

[1] Y. Takei, The fourth-order PI equation and coalescing phenomena of nonlinear turning points, 「Recent progress in the theory of Painlevé equations: algebraic, asymptotic and topological aspects」, 2013 年 11 月 7 日, Strasbourg 大学（France）

[2] T. Koike, On irregular modified A-hypergeometric systems and the Borel summation method, 「Recent progress in the theory of Painlevé equations: algebraic, asymptotic and topological aspects」, 2013 年 11 月 7 日, Strasbourg 大学（France）

[3] T. Koike, On the computation of Voros coefficients via middle convolutions, 「微分方程式の指数解析とその周辺」, 2013 年 10 月 15 日, 京都大学数理解析研究所

[4] Y. Takei, On the exact WKB analysis for higher order differential equations, 「Global Study of Differential Equations in the Complex Domain」, 2013 年 9 月 2 日, Banach Center（Warsaw, Poland）

[5] Y. Takei, The fourth-order PI equation and coalescing phenomena of nonlinear turning points, 「Formal and Analytic Solutions of Differential, Difference and Discrete Equations」, 2013 年 8 月 27 日, Mathematical Conference Center (Bedlewo, Poland)

[6] Y. Takei, On the turning point problem for Painlevé equations with a large parameter, 「The 6th Pacific RIM Conference」, 2013 年 7 月 4 日, 札幌コンベンションセンター

[7] Y. Takei, Exact WKB analysis and multi-summability, 「超局所解析と漸近解析の最近の進展」, 2012 年 10 月 25 日, 京都大学数理解析研究所

[8] T. Koike and Y. Takei, Exact WKB analysis of second-order non-homogeneous linear differential equations, 「漸近解析に於ける超局所解析の展望」, 2011 年 11 月 18 日, 京都大学数理解析研究所

[9] Y. Takei, Parametric Stokes phenomenon and the Voros coefficients for Weber's equation, 「函数方程式論セミナー」, 2011 年 8 月 30 日, Strasbourg 大学(France)

[10] Y. Takei, Second Painlevé equation vs Weber equation, 「The 8th Workshop on Linear and Nonlinear Waves」, 2010 年 9 月 11 日, 大阪大学

[11] Y. Takei, Second Painlevé equation vs Weber equation, 「Recent Developments in Resurgence Theory and Related Topics」, 2010 年 7 月 2 日, 関西セミナーハウス

[12] Y. Takei, Exact WKB analysis for a Schrödinger equation with a merging pair of simple turning points, 「函数方程式論セミナー」, 2009 年 10 月 27 日, Strasbourg 大学（France）

[13] Y. Takei, On the turning point problem for instanton-type solutions of (higher order) Painlevé equations, 「Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation」, 2009 年 10 月 16 日, E. De Giorgi 数学研究センター（Pisa, Italy）

[14] T. Koike, On a Schrödinger operator with a merging pair of a simple pole and a simple turning point. II, 「Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation」, 2009 年 10 月 15 日, E. De Giorgi 数学研究センター（Pisa, Italy）

[15] Y. Takei, Summability of formal solutions of PDEs and the geometry of Stokes curves, 「漸近解析と力学系の新展開」, 2009 年 6 月 19 日, 京都大学数理解析研究所

〔図書〕（計１件）

[1] T. Koike (eds.), Exact WKB Analysis and Microlocal Analysis, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, Vol. B37, RIMS, Kyoto University, 2013, 262 ページ

６．研究組織

(1)研究代表者

竹井　義次 （TAKEI, Yoshitsugu）
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号： 00212019

(2)研究分担者

（なし）

(3)連携研究者

青木　貴史 （AOKI, Takashi）
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号： 80159285

小池　達也 （KOIKE, Tatsuya）
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号： 80324599