

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月26日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21340032

研究課題名（和文） 非線形発展方程式及びその周辺分野の総合的研究

研究課題名（英文） Synthetic study of nonlinear evolution equation and its related topics

研究代表者

大谷 光春（OTANI MITSUHARU）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：30119656

研究成果の概要（和文）：物理・工学に現れる様々な非線形偏微分方程式（非線形楕円型方程式，非線形拡散方程式，非線形波動方程式，非線形シュレディンガー方程式及びそれらが結合した方程式系）に対して非線形発展方程式論の立場から，非線形関数解析学，実函数論，常微分方程式論，変分法などの手法を用いて総合的な研究を行った。

研究成果の概要（英文）：Various types of nonlinear PDEs (nonlinear elliptic equations, nonlinear diffusion equations, nonlinear wave equations, nonlinear Schrodinger equations) arising in physics and engineering were synthetically studied from the viewpoint of the theory of nonlinear evolution equations by using the techniques from the theory of nonlinear functional analysis, the theory of functions of a real variable, the theory of ordinary differential equations and the calculus of variations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
2010年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2011年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2012年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
年度			
総計	13,300,000	3,990,000	17,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：解析学，関数解析学，発展方程式，非線形偏微分方程式，変分法

1. 研究開始当初の背景

発展方程式論の基本定理であるHille-吉田の定理は，「消散系発展方程式の解の存在と一意性を保証するためには，それに付随する楕

円型方程式の可解性を調べれば良い」という原理を提示している。一方，発展方程式の研究とは直接関係しない非線形楕円型方程式の研究が，日本をふくめ諸外国で近年さかに行われるようになり，これまでに膨大な量の

知見が蓄積されてきた。上述の原理からすれば、これらの知識は非線形発展方程式の研究に役立つはずであり、このよう状況下において、楕円型方程式論及び発展方程式論の両面からの統合的な研究が待望されていた。

2. 研究の目的

「物理・工学・生物学等にあらわれる様々なタイプの非線形発展方程式の解析及び、これに付随した楕円型方程式の解の存在、非存在、一意性、多重性、正則性、解析性、対称性などが、解の性質や漸近挙動にどのような影響を及ぼすか？」という、総合的な研究をそれぞれの分野の経験豊富なエキスパートを配置して行うことにある。

3. 研究の方法

研究組織を発展方程式論グループと楕円型方程式グループとに分け、発展方程式論グループを次の三つのサブグループ、放物型、双曲型及び分散型で組織する。

さらに、これらが複雑にからみあった方程式系も、応用上きわめて重要であり、各グループの連携のもとにこれに関する研究を適宜おこなう。この研究が、非線形楕円型方程式の研究に新たな題材を提供することも期待される。これと平行して、楕円型方程式論グループには、常微分方程式論 (ODE) によるアプローチのサブグループ、関数解析学的手法及び変分方的手法のサブグループを構成し、他のサブグループとの密接な連絡のもとに研究目的に掲げた研究を遂行する。

関数解析学の観点からは、不動点定理、写像度の理論などの有効性が期待される。

変分法的手法は、楕円型方程式研究において中心的な役割を果たす手法である。

4. 研究成果

本研究で得られた主な成果は以下の通りである。

(1) 境界から熱が流失する効果が支配的な非線形境界条件を持つ熱方程式の楕円型評価・初期値境界値問題の可解性が示された。

(2) 外部から熱が流入する非線形境界条件と内部で熱を吸収する非線形項をもつ非線形放物型方程式の解の漸近挙動 (解の爆発、特異定常解の安定性・不安定性) について解析した。特に、境界からの熱の流入と内部での熱吸収とが釣り合う「臨界状態」に対して次の事実を解明した。

(i) 空間一次元の場合、すべての正値解は時

間大域的に存在し、特異定常解に漸近することが知られていたが、空間次元が 2 以上の場合には、すべての正値解は有限時間で爆発することが示された。

(ii) 解の爆発レートが非臨界の場合と大きく異なるという新奇な現象を発見した。

(iii) 球領域における球対称解は、常に境界上で爆発し、その他の点では有界にとどまること、爆発解はある意味で、爆発時刻を越えて解として延長することができ、その延長解はある可積分条件のもとで一意的に定まることが示された。

(2) 海洋学で扱われているモデルの一つである、流体 (水) の速度及び温度と流体中の溶質 (塩) の濃度の振舞いを記述する二重拡散方程式系 (Brinkman-Forchheimer 方程式 (ストークス方程式の変形方程式) とナビエ・ストークス型の移流項をもつ放物型方程式との混合方程式系) の 2 または 3 次元有界領域における時間大域解の存在と一意性が、ストークス作用素とラプラス作用素の $1/4$ 位の分数冪の定義域に属する初期値に対して示された。これによって、この方程式系に対する、大域アトラクターの構成の出発点がクリアされたことになる。また、よく知られているように、3 次元空間におけるナビエ・ストークス方程式の一意的時間大域解の存在問題が未解決大問題である事実と比較すると、非常に興味深い知見を与えている。

(3) 上記の二重拡散方程式系に対して、2 または 3 次元有界領域における時間周期問題に対する解の存在が、任意の大きさの外力項に対して示された。この事実は、よく知られているように、3 次元空間におけるナビエ・ストークス方程式の時間周期問題の解の存在は十分小さな外力項に対してのみ示されているという事実と比較すると、非常に興味深い知見を与えている。

(4) 強非線形拡散方程式が無限次元の (全ての解軌道を引きつける) 大域アトラクターを持つことが初めて示された。

(5) 未知関数 u の時間微分のべき乗に比例する減衰項と u のべき乗に比例する爆発項をもつ非線形波動方程式に対して、局所解の存在を保証する爆発項の増大度に対する従来の条件 (Georgiev-Todorava) を大幅に改良した。

(6) 回転磁場を内部構造として有する非圧縮粘性流体を記述する micro-polar 流体方程

式に対するスピン・渦度相互作用境界条件（流体の渦度と回転磁場が比例する条件）のもとでの、初期値境界値問題の局所解に関する well-posedness（適切性）及び小さな大域解の存在が示された。（解の存在は、大谷による劣微分作用素に対する非単調摂動理論の応用により示された。これにより、劣微分作用素に対する非単調摂動論の有用性が再確認された。）

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 26 件）

- (1) A. Haraux and M. Otani, Analyticity and regularity for a class of second order evolution equations, *Evolution Equations and Control Theory*, 査読有, Vol. 2, No. 1 (March 2013), pp. 101-117.
- (2) J. Harada and M. Otani, Blow-up and continuation of solutions for some semi-linear parabolic equations with nonlinear boundary conditions, *Libertas Mathematica, New series*, 査読有, Vol. 32, No.2 (2012), pp.111 - 153.
- (3) J. Harada and M. Otani, Multiple solutions for semilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions, *Electron. J. Differential Equations*, 査読有, Vol. 2012, No. 33 (2012), pp. 1-9.
- (4) N. Ikoma and H. Ishii, Eigenvalue problem for fully nonlinear second-order elliptic PDE on balls, 査読有, *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire* Vol. 29, No.5 (2012), 783-812. DOI : 10.1016/j.anihpc.2012.04.004
- (5) K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions for a system of semilinear heat equations and the corresponding damped wave system, 査読有, *Osaka J. Math.*, Vol.49 (2012), 331-348.
- (6) J. Fan, T. Ozawa, Uniqueness of weak solutions to the Ginzburg-Landau model for super-conductivity, 査読有, *Zeit. Angew. Math. Phys.*, Vol. 63 (2012), pp. 453-459.
- (7) K. Kuto and Y. Yamada, On limit systems for some population models with cross-diffusion, 査読有, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B*,

Vol. 17 (2012), pp. 2745-2769. DOI:

10.3934/dcdsb.2012.17.2745

- (8) J. Byeon and K. Tanaka, Nonlinear elliptic equations in strip-like domains, 査読有, *Adv. Nonlinear Stud.*, Vol.12, No.4 (2012), pp. 749-765.
- (9) M. Efendiev and M. Otani, Infinite dimensional attractors for parabolic equations with p-Laplacian in heterogeneous medium, 査読有, *Annales l'Institut Henri Poincare, Anal.Nonlineaire*, Vol.28 (2011), pp. 565-582. DOI:10.1016/j.anihpc.2011.03.006
- (10) J. Harada, S. Hashimoto and M. Otani, H^2 -solutions for some elliptic equations with nonlinear boundary conditions, 査読有, *Adv. Math. Sci. Appl.*, Vol.21, No.2 (2011), pp.435-446.
- (11) H. Ishii, Long-time asymptotic solutions of convex Hamilton-Jacobi equations with Neumann type boundary conditions, 査読有, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, Vol. 42 (2011), pp. 189-209.
- (12) K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions to the semilinear wave equation with time-dependent damping, 査読有, *Tokyo J. Math.*, Vol.34 (2011), 327-343.
- (13) T. Ozawa and Y. Yamauchi, Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with general non-decaying initial data, 査読有, *J. Math. Anal., Appl.* Vol. 379 (2011), pp. 518-523.
- (14) N. Ikoma and K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrodinger equations, 査読有, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, Vol. 40 (2011), pp. 449-480.
- (15) K. Terasawa and M. Otani, Global solvability of double-diffusive convection systems based upon Brinkman-Forcheheimer equations, 査読有, *Current Advances in Nonlinear Analysis and Related Topics*, Edited by T. Aiki, N.Kenmochi, M. Niezgodka, M. Otani, GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications, Vol. 32, Gakkotosho Co., Ltd., Tokyo, (2010),

pp. 505-516.

(16) H. Ishii and Y. Matsumura, Non-local Hamilton-Jacobi equations arising in dislocation dynamics, 査読有, Z. Anal. Anwend., Vol. 29 (2010), pp. 309-350.

(17) K. Kuto and Y. Yamada, Positive solutions for Lotka-Volterra competition systems with large cross-diffusion, 査読有, Applicable Analysis, Vol. 89 (2010), pp.1037-1066.

(18) K. Nishihara, Decay properties for the damped wave equation with space dependent potential and absorbed semilinear term, 査読有, Commun. Partial Differential Equations, Vol. 35 (2010), pp. 1402-1418.

(19) T. Ozawa and K. Yamauchi, Analytic smoothing effect for global solutions to nonlinear Schrodinger equations, 査読有, J. Math. Anal. Appl., Vol. 364 (2010), pp. 492-497.

(20) K. Hashizume, T. Koyama and M. Otani, Navier-Stokes equation with slip-like boundary condition, 査読有, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2009 (2009), pp. 1-8.

(21) J. Harada and M. Otani, Semilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions, 査読有, Nonlinear Anal. Vol. 71, No.12 (2009), pp. 2965-2968.

(22) N. Ichihara and H. Ishii, Long-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex and coercive Hamiltonians, 査読有, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 194, No. 2 (2009), pp. 383-419.

(23) K. Kuto and Y. Yamada, Limiting characterization of stationary solutions for a prey-predator model with nonlinear diffusion of fractional type, 査読有, Differential and Integral Equations, Vol. 22 (2009), pp. 725-752.

(24) K. Nishihara and J. Zhai, Asymptotic behaviors of solutions for time dependent damped wave equations, 査読有, J. Math. Anal. Appl., Vol. 360 (2009), pp. 412-421.

(25) Y. Sato and K. Tanaka, Sign-changing multi-bump solutions for nonlinear Schrodinger equations with steep potential wells, 査読有, Trans. Amer. Math. Soc.,

Vol. 361 (2009) pp. 6205-6253.

(26) Y. Cho, H. Sasaki, Y. -S. Shim and T. Ozawa, Remarks on the semirelativistic Hartree equations, 査読有, Discrete and Continuous Dynamical Systems A, Vol. 23 (2009), pp. 1277-1294.

[学会発表] (計 22 件)

(1) M. Otani, Mathematical analysis for an ODE-PDE model for swelling process of mitochondria, 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences -Modellings, Theory and Simulations -, November 5-9, 2012, Kyoto, Japan.

(2) T. Ozawa, A sharp bilinear estimate for the Klein-Gordon equation in two space-time dimensions, 9th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, June 11-15, 2012, El Escorial (Madrid, Spain).

(3) Y. Yamada, On logistic equations with diffusion and nonlocal effects, Workshop on Nonlocal Problems in the framework of the EU programme FIRIST, December 14, 2012, Zurich (Switzerland).

(4) K. Tanaka, Multi-bump positive solutions for a nonlinear elliptic problem in expanding tubular domains, "Singular limit problems in nonlinear PDEs", Nov. 26-30, 2012, CIRM Luminy, France.

(5) M. Otani, Solvability of Brinkman -Forchheimer equations of flow in double-diffusive convection, One forum, Two cities: Aspect of Nonlinear PDEs, Aug.29, 2011. Taipei (Taiwan).

(6) M. Otani, On Brinkman-Forchheimer equations of flow in double-diffusive convection, Dutch-Japanese workshop, Nov. 08, 2011, Eindhoven Netherland.

(7) Y. Yamada, Free boundary problems for some population models with diffusion, One forum, Two cities: Aspect of Nonlinear PDEs, Aug.29, 2011. Taipei (Taiwan).

(8) K. Nishihara, Diffusion phenomenon of solutions to the Cauchy problem for the damped wave equation, The 4th Math. Soc. of Japan, Seasonal Institute, Nonlinear

Dynamics in Partial Differential Equations Sept. 20, 2011. 九州大学, 福岡.

- (9) Tohru Ozawa, Finite charge solutions to cubic Schrodinger equations with a nonlocal nonlinearity in one space dimension, International Conference on Fluid and Gas Dynamics, Sept. 23, 2011. 浙江師範大学, 中国
- (10) K. Tanaka, Solutions with clustering peaks for a singularly perturbed NLS, PDE seminar, Nov. 15, 2011. Universidad de Chile, Santiago Chile.
- (11) M. Otani, Global solvability of Brinkman-Forchheimer equations of flow in double diffusive convection, UP Mathematics Centennial Conference, Oct. 22, 2010. University of the Philippines, Philippines.
- (12) H. Ishii, Singular integral equations and convergence of their solutions to p-Laplace equations, International Conference on Geometric and Nonlinear Partial Differential Equations, Sept. 02, 2010. Queensland, Australia.
- (13) Y. Yamada, On limit systems for some population models with cross diffusion Workshop on PDE Models of Biological Processes Dec. 17, 2010. NCTS, 新竹(台湾).
- (14) K. Nishihara, Large time behavior of solutions to the Cauchy problem for the semilinear damped wave equation, Chinese-German conference on fluid and gas dynamic May 22, 2010. Zhejiang Normal Univ., China
- (15) K. Tanaka, Mountain pass and symmetric mountain pass approaches to nonlinear scalar field equations and related problems, Conference on Nonlinear PDE's, Oct. 05-08, 2010. POSTECH, Korea.
- (16) T. Ozawa, Remarks on some dispersive estimates International Workshop "Fourier Analysis and Partial Differential Equations", June 14, 2010. University of Gottingen, Germany.
- (17) M. Otani, Infinite dimensionality of global attractors for parabolic equations governed by p-Laplacian in heterogeneous medium, Polish-Japanese Days "Current

advances in applied nonlinear analysis and mathematical modelling issues", May 18 – 21, 2009, Warsaw/Madralin, Poland.

- (18) H. Ishii, Weak KAM aspects of Hamilton -Jacobi equations with the Neumann type boundary condition, Joint meeting of the Korean Mathematical Society and the American Mathematical Society "Nonlinear Partial Differential Equations and Viscosity Solutions" Dec. 18, 2009. Ewha Womans University in Seoul, Korea.
- (19) Y. Yamada, Positive solutions for Lotka-Volterra competition systems with large cross-diffusion, Conference on Evolution Equations, Related Topics and Applications, JSPS-DFG Seminar, September 7, 2009. Helmholtz Zentrum Munchen, Germany.
- (20) K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions for the damped wave equation with absorbing semilinear term, 「流体と気体の数学解析」 2009年7月, 京都大学.
- (21) K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrodinger equations, "International Conference on Variational Methods" (ICVAM-2), May 17-23, 2009. Chern Institute of Mathematics (CIM), Nankai University in Tianjin, China.
- (22) T. Ozawa, Endpoint Strichartz estimates for the Klein-Gordon equation in two space dimensions, "Nonlinear waves and dispersion", April 29, 2009. Institut Henri Poincare, Paris, France.

[図書] (計 4 件)

- (1) T. Ozawa and M. Sugimoto, Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu B33, 2012, 121
- (2) 大谷 光春, 理工基礎 常微分方程式, サイエンス社, 2011, 215
- (3) T. Aiki, N. Kenmochi, M. Niezgodka, and M. Otani, Current Advances in Nonlinear Analysis and Related Topics, GAKUTO International Series.

Mathematical Sciences and Applications,
Vol. 32, Gakkotosho Co., Ltd., Tokyo, 2010,
531.

(4) T. Ozawa, Harmonic Analysis and
Nonlinear Partial Differential Equations,
Research Institute for Mathematical
Sciences Kyoto University, 2009, 173.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大谷 光春 (OTANI MITSU HARU)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：30119656

(2) 研究分担者

山田 義雄 (YAMADA YOSHIO)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：20111825

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：20188288

西原 健二 (NISHIHARA KENJI)

早稲田大学・政治経済学術院・教授

研究者番号：60141876

石井 仁司 (ISHII HITOSHI)

早稲田大学・教育総合科学学術院・教授

研究者番号：70102887

小澤 徹 (OZAWA TOHRU)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70204196

(3) 連携研究者

小川 卓克 (OGAWA TAKAYOSHI)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：20224107

剣持 信幸 (KENMOCHI NOBUYUKI)

仏教大学・教育学部・教授

研究者番号：00033887

小池 茂昭 (KOIKE SHIGEAKI)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：90205295

坂口 茂 (SAKAGUCHI SHIGERU)

東北大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：50215620

鈴木 貴 (SUZUKI TAKASHI)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：40114516

林 仲夫 (HAYASHI NAKAO)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：30173016

井戸川 知之 (IDOGAWA TOMOYUKI)

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号：40257225

石渡 通徳 (ISHIWATA MICHINORI)

福島大学・共生システム理工学類・准教授

研究者番号：30350458

赤木 剛朗 (AKAGI GOROU)

神戸大学・システム情報学研究科・准教授

研究者番号：60360202