

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 8 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21340033

研究課題名（和文） フェイズフィールド法を基点とした数理解析の展開

研究課題名（英文） Development of mathematical analysis via phase field method

研究代表者

利根川 吉廣（TONEGAWA YOSHIHIRO）

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80296748

研究成果の概要（和文）：時刻でパラメータ付けされた滑らかな曲面の族が平均曲率流であるとは、各点各時刻において、その曲面の平均曲率ベクトルが曲面の速度ベクトルに等しいときである。フェイズフィールド法および幾何学的測度論の技術を用いて、研究代表者は特異点集合を持ちつつ動くような平均曲率流の一般解の存在証明およびその正則性理論の構築に成功し、幾何学的な時間発展問題における基礎的理論を進展させた。

研究成果の概要（英文）：A family of smooth surfaces parameterized by time is called mean curvature flow if the velocity of motion at each point and time is equal to its mean curvature vector. We have made fundamental advance of knowledge on the general existence and regularity theory of mean curvature flow which may have singularities, and moreover, on those of geometric time evolution problems in large.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2010年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2011年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2012年度	2,700,000	810,000	3,510,000
年度			
総計	11,600,000	3,480,000	15,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：Allen-Cahn 方程式・Cahn-Hilliard 方程式・フェイズフィールド法・変分法・平均曲率流・幾何学的測度論・極小曲面・相分離

1. 研究開始当初の背景

2つの異なる相が薄い界面領域を挟んで共存する現象、例えば液-気相共存、結晶の固-液相共存、高分子溶液の相分離、2元合金の粒界分離などであるが、これらは一般にミクロな分子間相互作用がナノからサブミリメートルスケールで協同的に発現した現象であり、理学的見地のみならず産業、工学上重要な研究対象である。興味深い現象は一般

に非平衡であり、様々な空間的に非一様な量、例えば密度場、温度場、流速場、電磁場、構成分子固有の秩序場などが界面の表面張力と相互作用をおこし、時として複雑なパターン形成を起こす。モデル方程式はほとんどの場合、統計力学的な第一原理から導出できないか、できたとしても非平衡協同現象を描写するような時空間スケールとは全く無関係なものになってしまう。よって第一原理からモデル方程式を導出するのではなく、一般に

は現象論的考察、熱力学的考察、平均場近似、エネルギー保存則等を援用して、空間的非一様性を取り込んだ非線形偏微分方程式によって現象をモデル化する。相分離の界面ではこれら相互作用する場の量が不連続性を自然に持ち、数学的のみならず数値解析的にも取り扱いが困難である。その困難を取り除く為、多くの場合現象論的な手法として取り入れられているのがフェイズフィールド法(PF法と以下略)であり、界面を表す自由境界問題における重要な研究課題となっている。界面を表す他の強力な手法としては等高面法(又はレベルセット法)があり、特に数値計算的な手法として工学的に重要である。その一方、等高面法の厳密な適用範囲は等高面の順序を時間的に保存するような特殊な場合に限られており、界面と相互作用する場がある場合、特殊な場合を除いて一般には適用できない。PF法は等高面法に比較して適用範囲が広く、相互作用する場を含む複雑なモデル問題にも適用可能であり、現実的な非平衡モデル問題の枠組みおよび数値解析にすでに多用されている。PF法は界面の表面張力が他の場と相互作用する静的、動的問題の数理解析的なプラットフォームを提供すること、変分法を通じて極小曲面理論に関係をもつなどして深みを備えつつ数学にとどまらない学際的研究分野である一方、厳密に証明されている事柄は必ずしも多いとはいえない面がある。研究代表者はこの方面において、定常問題および非定常時間発展問題について幾何学的測度論を用いた手法で様々な結果を得ているが、以下の研究目的に述べる具体的な問題に挑戦することで変分法におけるの未来への突破口を開く事を狙っている。

2. 研究の目的

表面張力効果を表すエネルギーは古典的には界面面積であるが、PF法ではあるパラメータに制御された汎関数エネルギーとして扱われる。研究代表者は従来の研究で、PF法における基礎理論構築に携わってきた。特にPF法に関して重要な課題である、界面領域とその特異極限である微分幾何学的な概念としての界面の関係を、非線形解析学の様々な技術、特に非線形偏微分方程式論と幾何学的測度論を用いて徐々に明らかにしてきた。平成17~20年の研究期間で採択された基盤研究(B)「非平衡界面現象における表面張力とその相互作用」ではそれまでの基礎的な研究に立脚して、特に流体や弾性体と相互作用する2相界面問題に関する研究およびそれらに間接的に動機付けされた研究課題に取り組んでいる。その研究実績の例としては、界面表面張力効果を取り入れることおよびPF法を用いた解の構成を行うことで、2

相非圧縮粘性流体の時間大域弱解構成に成功したことである。PF法はこの界面を含む時間発展問題に対して今後着実な発展をもたらすと考えられ、本研究課題はその発展を進めると共に、以下の3つの具体的な研究対象を含む界面現象の数理解析モデルに関しての先端的研究を推し進める事を目的とする。

(1) Cahn-Hilliard 方程式の特異摂動解析。(以下CH式と略)

CH式は2元合金など、保存場の動的2相分離現象を描写する基礎的なPF法の方程式であり、材料科学のみならず画像修復などの広い工学的分野において、主として数値解析のツールまたはモデル方程式として多用されている。2相分離界面は時間的に界面拡散効果によって動き、領域の粗視化が起こる。界面厚みを表すパラメータを0に近づけた極限では、界面の動きは自由境界問題のMullins-Sekerka方程式(MS式)を満たすことが特別な場合は知られている。一般の場合では測度論的な弱い意味でMS式が成り立つことが予想されている。この問題に関しては、界面の平均曲率と化学ポテンシャル場を関係付けるGibbs-Thomson法則を一般的に証明することが重要である。この方向では部分的な結果をRoegerとの共同研究で得ているが、CH式に適用できる範囲ではまだ証明されていない。この(CH式→MS式)の予想問題解決を目指す。

(2) 2相Navier-Stokes(NS)方程式の問題。

各相では流体方程式であるNS方程式が満たされ、相分離界面上では2相間の法線方向圧力差および界面表面張力の2つの効果で運動する問題を考える。界面の運動自体も流体運動に影響するので、これは流体運動と界面運動の相互作用問題である。一般に相界面はある時刻で特異性を持つ可能性があるため、古典解の枠組みでは時間大域解の構成は出来ない。過去数年の研究で、この問題の弱解存在を幾何学的測度論の概念であるバリフォルドとPF法の特異摂動極限を用いて示す道筋をつけてきた。一方その研究過程で、非圧縮粘性流体が一般に属するクラスの正則性をもつ流速場で表面張力を持ちつつ運動する界面は、結果的には界面的でない微細構造を生じてしまう可能性があることが分かり、またいわゆるSerrin条件と界面の正則性との直接的な関係することが明らかになった。これら結果は流体問題にも新しい視点を与える可能性があり、弱解の正則性理論などの研究課題についても先鞭をつける。

(3) PF法と大偏差原理における汎関数最小化問題。

以下の問題を考える。磁気デバイスに用い

られるような微小磁石列が熱揺動下、限られた時間内（例えばパルスレーザー照射時間内など）に一樣プラススピン状態を空間的にどのようにもう1つの一樣マイナススピン状態にスイッチするか、またそのスイッチが起こる確率を求めよ。この問題を Reznikoff は、確率微分方程式版 Allen-Cahn 方程式でのモデル問題設定をし、大偏差原理の枠組みでそのアクション最小化問題を考えた。様々な時空スケールの中、非自明なスピン分布パターンが確率的に最も起こりやすいスケールにおいてはスピン状態を分離する界面領域が生成される。この問題は、空間1次元の場合、満足のいく結果を Reznikoff らとの共同研究で得たが、他方で多次元、特に2,3次元の場合は問題の設定自体分からないことが多い。多次元問題では、汎関数は界面運動エネルギーと界面弾性エネルギーの和を含み、ある特別な場合には平均曲率流が最小解となる興味深いものである。時間方向の積分を含む汎関数の最小化問題は変分法のトピックとしては極めて新奇である一方、古典的な平均曲率流を内包するような一般性をもつため、今後の活発な研究が期待される。当初の研究目標としては特別な場合の古典解の存在証明、また中長期的には PF 法で得られた特異極限理解に対する正則性理論の構築を目指す。

3. 研究の方法

(1) 研究目的で提案された問題について研究分担者および連携研究者と連絡を取りつつ研究を進めるとともに、なるべく数多くの国内外のセミナーや国際研究集会において研究発表を行い、思いもよらない方向からのフィードバックを得る努力をする。当初想定していなかった方向での研究の進展は十分考えられるので、研究目的は適宜修正しつつ研究を行う。研究活動の重要な一環として2009-2012年度間の毎年、国際的研究集会である北東数学解析研究会及び偏微分方程式論札幌シンポジウムを開催参加する。

(2) 研究期間内に以下の研究集会を研究活動の一環として組織した：

①2012/7/30-8/3 Variational methods for evolving objects, 北海道大学 (札幌市)

②2012/6/11-15 12th International Conference on Free Boundary Problems: Theory and Applications, Lake Chiemsee (Germany) (セッション組織委員)

③2011/11/16-18 SNU-HU Joint Symposium in Mathematics, Recent developments in mathematical analysis and related fields, Seoul Nat. Univ. (Korea)

④2010/11/25-27 Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2010,

北海道大学 (札幌市)

⑤2010/7/12-8/13 特別企画札幌ミニセミナー「動く界面」, 北海道大学 (札幌市)

⑥2009/11/19-21 Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2009, 北海道大学 (札幌市)

4. 研究成果

(1) Brakke の正則性定理の新証明

時刻でパラメータ付けされた滑らかな k 次元曲面の族が平均曲率流であるとは、各点各時刻において、その曲面の平均曲率ベクトルが速度ベクトルに等しいときである。Brakke はバリフォールドの概念を用いて、一般化された意味での平均曲率流を研究し、その存在定理と正則性定理を1978年に Mathematical Notes として Princeton Univ Press より発表した。その後1980年代になって幾何学的時間発展問題が大きく注目されるにあたり、Brakke の平均曲率流はパイオニア的な仕事として広く認知されたものの、特にその正則性理論の細部についての理解はほとんど進まなかった。この点について、次項で述べる移流項付き平均曲率流の存在定理をきっかけにして、研究代表者は博士学生の葛西香太と共に Brakke の正則性理論をさらに一般化した枠組みで証明することを試みた。その結果、Brakke の証明の道筋とは異なる手法による新証明および自然な一般化を得ることに成功した(論文②)。新証明は1970年代には知られていなかった Huisken の単調性公式を随所に使用して評価を行うものであり、また Brakke の証明では存在しないパラボリックな意味でのリプシッツ関数近似を用いた blow-up 議論を行うものである。論文②は平均曲率流の専門家の中で基本的な結果として国際的に既に広く認知されるに至っている。特に興味深い点としては、この結果は幾何学的測度論の枠組みでの極小曲面に対する基本定理の、Allard による正則性定理の自然な時間発展版になっていることである。我々の正則性理論の証明は Allard の証明と比較して時間パラメータが入る分困難であるのはもちろんであるが、Allard の証明よりもさらにシャープな時空の評価を必要とするものであり、Allard の定理をさらに高所から俯瞰するという、意義深い結果となっている。上記結果は空間1階微分のヘルダー連続性評価を得る定理であるが、2階微分の評価はなかったため、古典的な意味で平均曲率流であることを示すには至っていない。この点を解決したのが論文①であり、その主結果として、「Brakke の平均曲率流は、ほとんどすべての時刻でほとんど全ての点の近傍において滑らかである」という、元々 Brakke によって主張された定理を完全な形で証明する

ことに成功した。これら結果はフェイズフィールド法を用いた一般的な存在定理がなければ成せなかったものであり、研究目的(2)の2相N-S流体問題の研究に動機付けられ始めた研究の大きなスピノフのひとつとなった。

(2) 移流項付き平均曲率流の存在定理

平均曲率流は、曲面の速度イコール平均曲率ベクトルを各点各時刻で満たす問題であることは前項で述べたが、これを一般化することは例えば2相流体中で流体に流されながら時間発展をするようなモデル問題を考える上で極めて自然である(研究目的(2))。そのため、まず前もって空間時刻に依存して変化する流速場 u が与えられていると考え、また初期曲面が時刻0で与えられていると考えたとき、曲面の速度イコール平均曲率ベクトル $+u$ という速度法則を満たす曲面の族が存在するか否か、という問題を考えることができる。論文⑥では、空間次元が2または3の場合について、もし u がある可積分条件を満たすソボレフ関数のクラスに属するならば、一般的に与えられた C^1 クラスの曲面を初期曲面として、速度法則を弱い意味で満たすバリフォルド族が存在する事を示した。この結果によって得られた重要な知見は、このような解を見つけるためには曲面測度の上からの局所評価が肝要であることが分かった点である。もしこの評価がないとすると、フラクタルのような複雑な微細構造がある時刻に発生してしまう可能性があり、測度論的なアプローチであったにしても局所的な曲面の描写が困難となる。またこの結果を用いて、2相N-S流体の弱解存在定理を論文③において証明した。また論文⑥の結果をすべての空間次元に拡張することに高棹圭介との共同研究で成功している(論文準備中)。

(3) 安定的2相分離界面解の正則性定理

フェイズフィールド法において、2相分離問題における最も簡潔かつ基本的な表面張力効果を表すエネルギーとしてModica-Mortolaエネルギー(またはvan der Waals-Cahn-Hilliardエネルギー)がある。エネルギー最小解は界面厚みを表すパラメータを0に近づけたときには面積最小曲面に近づくことが1980年代の結果より知られている。面積最小曲面は低次元の場合(具体的には次元が7以下の場合)には、実解析的な極小曲面である事が知られている。論文④では、単に安定的な停留点であるという弱い仮定の下、極限の相分離面は面積最小曲面と同じ正則性を持つことを証明した。エネルギー最小解は自動的に安定的な停留点であるが、逆は必ずしも成り立つかどうかは分からないという意味で、安定性はエネルギー最小

性よりも弱い仮定である。この結果は研究代表者が解明してきた、停留点の結果(2000年)、安定的停留点の特徴づけ(2005年)などの過去の研究結果に加え、共著者であるWickramasekeraによる最近の安定的な極小曲面の正則性理論(Ann. Math. 掲載予定)を本質的に応用したものであり、結果の描写は単純であるが、非常に多方面の高度な理論を駆使したものとなっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

① Tonegawa, Y., A second derivative Hölder estimate for weak mean curvature flow, *Advances in Calculus of Variations*, Online 掲載済, 48 ページ, (2013) 査読有

DOI: 10.1515/acv-2013-0104

② Kasai, K., Tonegawa, Y., A general regularity theory for weak mean curvature flow, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Online 掲載済, 68 ページ, (2013) 査読有

DOI: 10.1007/s00526-013-0626-4

③ Liu, C., Sato, N., Tonegawa, Y., Two-phase flow problem coupled with mean curvature flow, *Interfaces and Free Boundaries*, 14, 185-203 (2012) 査読有

DOI: 10.4171/IFB/279

④ Tonegawa, Y., Wickramasekera, N., Stable phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory, *Journal für Reine und Angewandte Mathematik*, 668 191-210 (2012) 査読有

DOI: 10.1515/CRELLE.2011.134

⑤ Okabe, S., The variational problem for a certain space-time functional defined on planar closed curves, *J. Differential Equations*, 252, 5155-5184 (2012) 査読有 <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbbr.2011.03.031>

⑥ Liu, C., Sato, N., Tonegawa, Y., On the existence of mean curvature flow with transport term, *Interfaces and Free Boundaries*, 12, 251-277 (2010) 査読有

DOI: 10.4171/IFB/234

[学会発表] (計36件)

(以下発表者はすべて利根川吉廣)

① 一般化された極小曲面や平均曲率流の正則性理論について、日本数学会年会総合講演, 2013/3/21 京都大学(京都市)

② A local regularity theorem on varifold

mean curvature flow, NLPDE セミナー, 2012/12/21 京都大学 (京都市)

③ Almost everywhere regularity for weak mean curvature flow (3回連続講演) Tohoku University nonlinear PDE workshop, 2012/9/28, 29 東北大学 (仙台市)

④ Local regularity results on mean curvature flow, ERC Workshop on Geometric PDEs, 2012/9/12 Univ. of Pisa (Italy)

⑤ A local regularity theorem for weak mean curvature flow, Conference 'Geometric measure theory', 2012/7/2 Max Planck 研究所 Golm (Germany)

⑥ Existence and regularity of mean curvature flow via Allen-Cahn equation, 12th International Conference on Free Boundary Problems: Theory and Applications, 2012/6/15 Lake Chiemsee (Germany)

⑦ 平均曲率流の弱解に対する正則性理論, 日本数学会分科会一般講演, 2012/3/27 東京理科大学 (東京都)

⑧ Brakke Type regularity, Seminar, 2012/3/9 Courant Institute (USA)

⑨ Overview of generalized mean curvature flow, Seminario de Analisis y geometria, 2012/2/9 Univ Autonoma de Madrid (Spain)

⑩ Overview of generalized mean curvature flow, Conferencia del Departamento de Matematica Aplicada y el IML, 2012/2/8 Complutense Univ (Spain)

⑪ A general regularity theorem for weak mean curvature flow, 29th Kyushu Symposium on PDE, 2012/1/23 九州大学 (博多市)

⑫ A new regularity theorem for weak mean curvature flow, 8th East Asia Conference on PDE, 2011/12/20 Pohang Univ, (Korea)

⑬ On the local regularity theorem for weak mean curvature flow, Sino-Japan Conf. of Young Mathematicians, 2011/12/ 6 Nankai Institute (China)

⑭ A general regularity theorem for weak mean curvature flow, SNU-HU Joint Symposium in Mathematics, 2011/11/16 Seoul National Univ, (Korea)

⑮ 平均曲率流の弱解とその正則性理論, 談話会, 2011/11/1 東京理科大学 (野田市)

⑯ A general regularity theorem for weak mean curvature flow (2回連続講演), 第一回室蘭非線形解析セミナー, 2011/10/28, 29 室蘭工業大学 (室蘭市)

⑰ 平均曲率流の弱解についての新展開, 語ろう数理解析, 2011/9/5 北海道大学 (札幌市)

⑱ A new proof of Brakke's partial regularity for MCF, PDE Workshop, 2011/8/11 Oberwolfach 研究所 (Germany)

⑲ Recent progress on stable minimal surface and its application, Workshop on geometric analysis, 2011/2/22 東北大学 (仙台市)

⑳ Stable and unstable critical points of double-well energy, 第12回東北数学解析研究会, 2011/2/21 東北大学 (仙台市)

㉑ Two-phase flow problem with interfacial energy interaction, Phase Field Models in Fluid Mechanics, 2011/2/15 Univ. of Regensburg (Germany)

㉒ 移流項をもつ平均曲率流の問題, 愛媛解析セミナー, 2010/12/10 愛媛大学 (松山市)

㉓ Regularity of stable diffuse interface, 応用解析研究会, 2010/11/13 早稲田大学 (東京都)

㉔ 安定的な相分離面の正則性について, 日本数学会秋季総合分科会一般講演, 2010/9/24 名古屋大学 (名古屋)

㉕ Regularity of stable phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory, Recent Advances on de Giorgi's Conjecture and the Study of Entire Solutions of Nonlinear Scalar Equations, 2010/8/12 BIRS, Banff (Canada)

㉖ On the time-global existence for non-Newtonian two-phase flow with different densities, Mathematical analysis on fluid and gas, 2010/7/9 京大数理研 (京都市)

㉗ 相分離界面と極小曲面の正則性理論について, 談話会, 2010/6/16 神戸大学 (神戸市)

㉘ A new two-phase fluid problem with surface energy, New Trends in the Geometric Flow, 2010/6/8 京大数理研 (京都市)

㉙ On the regularity of stable phase interfaces, HMA seminar, 2010/5/21 広島大学 (東広島市)

㉚ Analysis of two-phase problem: implications of phase field method to approximation scheme, HMC Seminar, 2010/3/17 金沢大学 (金沢市)

㉛ フェイズフィールド法にまつわる変分問題 (2回連続講演), Workshop 「変分法と領域摂動」, 2010/2/11, 12 神戸インスティテュート (神戸市)

㉜ Existence of weak mean curvature flow with non-smooth forcing term, SIAM conference on Analysis of PDEs, 2009/12/7 Hilton Miami Downtown (USA)

㉝ 表面張力と移流効果の動的なせめぎあい, 談話会 2009/10/26 東北大学 (仙台市)

㉞ Existence of mean curvature flow with non-smooth transport term, PDE Workshop, 2009/8/7 Oberwolfach 研究所 (Germany)

㊦Existence of mean curvature flow with non-smooth transport term, PIMS workshop, Asymptotic analysis in the calculus of variations and PDEs, 2009/7/7 Univ. of British Columbia (Canada)

㊧Variational problems motivated by large deviation theory, 微分方程式セミナー, 2009/6/5 大阪大学 (大阪市)

[その他]

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~tonegawa/toppage.jp.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

利根川 吉廣 (TONEGAWA YOSHIHIRO)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: **80296748**

(2) 研究分担者

西浦 廉政 (NISHIURA YASUMASA)
東北大学・原子分子材料科学高等研究
機構・教授
研究者番号: 00131277
(H21-H23)

(3) 連携研究者

岡部 真也 (OKABE SHINYA)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 70435973

前川 泰則 (MAEKAWA YASUNORI)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 22740090