様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2009～2013
課題番号：２１３４００３４
研究課題名（和文）超離散系における可積分構造の研究

研究課題名（英文）Study on the integrable structure of ultradiscrete systems

研究代表者
時弘　哲治（TOKIHIRO, Tetsuji）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・教授

研究者番号：１０１６３９６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　12,100,000円、（間接経費）　3,630,000円

研究成果の概要（和文）：超離散系とは連続的な方程式から極限操作によって導かれるセルオートマトン系である．可積分性を持つと考えられる超離散系を研究し，(1) 典型的な超離散可積分系である箱玉系の相関関数を求めた，(2)超離散KdV方程式において負のソリトンと呼ばれる特殊な解の構造を明らかにした，(3)超離散パンルヴェ系の解を符号付超離散化により求め，分割数に関する一連の公式を得た，(4)有限体上の可積分系はAGR(almost good reduction)と呼ぶ性質を持つことを示した．

研究成果の概要（英文）：An ultradiscrete system denotes a cellular automaton constructed from a continuous equation through a limiting procedure. We investigated the ultradiscrete systems which are considered to have integrability. The principal results in this research are; (1) the correlation functions of the box-ball systems, which are typical integrable ultrtadiscrete systems, are obtained, (2) the mathematical structure of the so-called negative solitons in the ultradiscrete KdV equation is clarified, (3) solutions to ultradiscrete Painlevé equations are constructed and a series of formulae for partition numbers are obtained, (4) integrable systems over finite fields are shown to have a property called AGR (almost good reduction).

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：セルオートマトン　超離散系　可積分系　箱玉系　有限体　トロピカル曲線

## １．研究開始当初の背景

超離散系とは，超離散化と呼ばれる極限操作によって連続的な方程式から得られるセルオートマトン（Cellular Automaton）である．単なるセルオートマトンとの違いは，背後に母体となる偏差分方程式やその連続極限としての偏微分方程式が存在することであり，超離散系はその方程式の特性を受け継いだセルオートマトンになる．超離散可積分系と呼ばれる系は，この母体となる方程式が非線形可積分方程式であるものである．そのため，もとの方程式の持つソリトン解や準周期解と類似の時間発展パターンを持ち，可積分力学系として十分多くの保存量を持ち，初期値問題を解くことができる．

超離散化の手法は 1996 年に研究代表者らによって提案され，多様な非線形可積分方程式に付随する超離散系が構成され，解の性質や保存量に関する考察がなされてきた．　その後 2001 年には，格子模型の基底状態をセルオートマトンの時間発展パターンと同一視することによって，量子代数の対称性を持つ可解格子模型からも超離散可積分系を構成できることがわかり，クリスタル理論を用いた分類，一般化，初期値問題の解法などの研究が進んできた．

一方，たとえば Gromov-Witten 不変量の構成などに威力を発揮する半体上の幾何学（トロピカル幾何学）に関心が集まっている．トロピカル幾何学では，代数多様体からトロピカル化（tropicalization）と呼ばれる手法でトロピカル多様体を構成するが，これは，その代数多様体のアメーバ（実対数写像の像）の極限集合であり，トロピカル化と超離散化は形式上同じ操作になっている．非線形可積分方程式系の初期値問題の解法では等スペクトル曲線と呼ばれる代数曲線が重要な役割を果たすが，超離散可積分系においてもその対応物であるトロピカルスペクトル曲線を定義することが可能であり，トロピカルヤコビ多様体，トロピカルアーベル写像，超離散フェイ恒等式などを用いた超離散可積分系の研究も行われている．さらに，パンルベ方程式や可解カオスの超離散化など研究対象が拡がっている．

このように，超離散可積分系の研究は，まず非線形可積分方程式系からの解析的なアプローチ，次いで量子代数を用いた代数的なアプローチが登場し，現在では代数曲線のトロピカル化を用いた幾何的なアプローチが始まり多様性を深め，その結果，多くの新しい課題，アイデア，応用可能性が生まれている．超離散可積分系の典型例である箱玉系 において研究代表者が直接関わっただけでも，「リーマン予想と基本周期の漸近評価の等価性」，「ベーテ仮設法におけるストリング仮説の保存量による意味づけ」，「べき乗根計算アルゴリズムへの応用」などさまざまな興味深い結果が得られ，これらの結果の統一的な理解，一般化，応用へと多くの課題が生まれている．

## ２．研究の目的

このような背景のもとで本研究は，進展しつつある 3 つの側面–トロピカル幾何，非可換可積分方程式系，有限体上の可積分系--から超離散可積分系の特に可積分構造を研究すること，およびそこで得られた知見の他分野への応用を図ることを目的とする．この目的達成のための本研究の主たる課題とその内容は以下のものである．

(1)　超離散可積分系に対するラックス形式の一般論の構築. トロピカルスペクトル曲線を用いた初期値問題解法（逆散乱法）の確立.

(2)　非可換 KP 方程式を含む KP 階層の理論の再構成に基づく, 超離散ＫＰ階層の構成と解空間の決定. 解空間とトロピカルグラスマン多様体, 簡約化方程式と対応する幾何クリスタル・トロピカル R 行列との対応関係の確立.

(3)　有限体上の戸田格子方程式およびその一般化に対する初期値空間の理論の構成. 簡約による有限体上のパンルベ方程式の導出, 初期値空間の決定.

(4)　可積分量子セルオートマトンの構成, 特に箱玉系の量子化. 古典可積分系と量子可積分系の融合の考察.

## ３．研究の方法

(1) トロピカルスペクトル曲線の理論

超離散戸田格子方程式，およびその一般化方程式を，付随するトロピカルヤコビ多様体で線形化することにより逆超離散化を用いない初期値問題の解法を得，より一般の超離散ソリトン方程式の初期値問題を解くための超離散逆散乱法を構成する．超離散戸田方程式に付随するトロピカルスペクトル曲線（トロピカル超楕円曲線）における Abel-Jacobi の定理のトロピカルアナログの証明.

これは通常の Abel-Jacobi の定理（Abel 写像が次数 0 の Picard 群と Jacobi 多様体の同型を与えること）をトロピカル曲線で置き換えたものである．手法は，超離散化による直接計算を行う．つまり，トロピカル超楕円曲線が超楕円曲線の超離散極限であることを用い，超楕円曲線を与える方程式から具体的なパラメータ付けによる極限操作でトロピカル超楕円曲線（これはメトリックグラフになる）を構成し，同時に，対応する周期行列，テータ函数の超離散化で得られたトロピカルヤコビ多様体（整数格子点の集合）を構成し，定義されたトロピカルアーベル写像が同型を与えることを直接計算で調べる.

(2) 非線形可積分偏微分方程式系の統一理論に，佐藤幹夫および伊達，柏原，神保，三輪による KP 階層の理論（佐藤理論）がある．これは KP 方程式の解全体が無限次元グラスマン多様体をなし，その上に無限次元変換群が作用していることを明らかにしたもので

ある．この KP 階層の理論の超離散版を構成する．

まず，佐藤理論を１階線形連立微分方程式の解と係数行列の関係式の形で再定式化する．これにより，係数行列に正値性を仮定することによって，方程式および解が共に正値性をもち超離散化しやすい形式が得られる．そして，三輪変換あるいはその一般化を用いて離散 KP 階層を構成する．τ関数，無限次元グラスマン多様体，頂点作用素，離散ソリトン解について行列形式での表示式と正値性について考察する．

(3) 離散ソリトン方程式の係数体を有限体に置き換えた系に対して，τ函数，ソリトン解，簡約，を考察し，特に相似関約によって得られる有限体上のパンルベ方程式に対して初期値空間の理論を構成する．

離散可積分方程式において係数体を有限体（たとえば $\mathbb{Z}_p$）にとると形式的には超離散系が得られる．しかしながら，τ関数がその定義域において頻繁に０となり，方程式の従属変数はτ関数の比で与えられるためこのままでは意味をなさない．そこで,具体的に次のアプローチをとる．まず，有限体上の離散戸田分子方程式（および周期離散戸田方程式）を考察する．従属変数を適切な射影空間およびその部分多様体に値をとるものとし，数値シミュレーションによって，0 をヒットしない初期状態を系統的に調べ，well-defined な初期値空間およびその数理的構造を帰納的に求め，証明を試みる．また，ブローアップを行って初期値空間を構成し上記の困難の解決を試みる．(4) 可積分系から自然に導かれる量子セルオートマトンを構成し，この系での量子変形パラメータ，スペクトルパラメータ，超離散化パラメータの関係を求め，超離散系を介さない量子-古典対応を探る．特に組合せ論的な手法などを用いて，箱玉系の相関関数の計算を行う．

４．研究成果

(1) 超離散可積分系の代表例である周期箱玉系の相関関数を研究した．周期箱玉系は KdV 方程式の超離散極限であると同時に，６頂点模型を一般化した可解格子模型の絶対零度極限（結晶化 -crystallization-）でもある．可解格子模型とは，熱力学極限において分配関数を解析的に求めることができ，様々な相関関数を厳密に求めることができる格子模型である．しかしながら，一般には相関関数の計算は極めて困難であり，もっとも単純な６頂点模型でさえ，多重複素積分による表式や自由フェルミオンを用いた表式など現在も研究が盛んに行われている．周期箱玉系の相関関数は，これらの可解格子模型の相関関数のある極限でもあるため，周期箱玉系の相関関数を求めることは可解格子模型研究の観点からも興味深い．本年度は，まず，１点相関関数および短距離の２点相関関数については組合せ論的な手法で具体的な表式を求めた．その結果は１点相関関数と距離１の２点相関関数については簡単な表式が得られたが，距離２のものはいくつかの漸化式を経由するやや複雑な形で表現できることを示した．距離３以上の場合でも組合せ論的な表式を得ることは可能であるが煩雑になる．しかしながら，周期箱玉系の初期値問題の研究の結果より，任意の状態は超離散テータ関数を用いて表現できることが示されており，この結果を用いて，一般の$n$点相関関数は，超離散テータ関数を用いて表示できることを示した．これは多重複素積分の表式に類似する公式であると考えられる．

(2) 超離散KdV方程式の保存量を"負のソリトン"が存在する一般の場合について，箱の容量が大きな箱玉系への変換を利用して構成した．ここで負のソリトンとは2年前に広田良吾によって名づけられた超離散系特有の解であり，対応する連続系では，通常のソリトンが点スペクトルに対応するのに対して，連続スペクトルに属する解であると考えられ，背景解とも呼ばれている．同時に可解格子模型との対応関係も明らかになり，A_1^{(1)}対称性を持つことがわかった．さらに，通常のソリトンと負のソリトンの存在する解も，この拡張した箱玉系の解として構成し，具体的な解の表式を得た．箱の容量が１の箱玉系では，すべての状態が離散KdV方程式のソリトン解からの超離散化によって得られ，この事実を利用して初期値問題を解くことが可能である．負のソリトンが存在する場合にも，同様にして初期値問題が解かれると予想される．

(3) p-超離散化と呼ばれる正と負の値をとる系に対しても有効な超離散化の手法の応用として，q離散Ai および Bi 関数から，超離散化によって超離散 Ai および Bi 関数を導出した．この導出には，差分方程式における Euler変換の q-類似を用いて得られる，q離散Ai関数に対する非自明な恒等式を用いた．この導出の過程で副産物として，制限付の分割数に関する無限個の非自明な恒等式を得た．この恒等式の組み合わせ論的な意味はよくわからず，今後の課題である．

また，超離散パンルベII方程式のあるクラスの特殊関数解を，対応するq離散パンルベII方程式の行列式を用いた特殊関数解に対してp-超離散化を行うことにより構成した．

(4) 有限体上の離散可積分方程式を研究した．非線形発展方程式を有限体上で研究する際に，これまで大きな障害となってきたのは，従属変数の逆数を取る操作が入るため，一般に0で割ることにより時間発展が定義できないことであった．これに対して，離散パンルベ方程式では，坂井理論に基づいて有限体上で射影空間をblow-upした初期値空間の構成を行い，方程式を射影空間の自己同型写像と

して定義することによって解決できた．また，ソリトン方程式では，有限体そのものではなく有限体上の有理関数を扱うことで，時間発展の不定性を解消することができた．この手法と，離散方程式の可積分性の判定テストである特異値閉じ込めテストとの関係についても明らかにした．また，Yang-Baxter 写像に付随する一般化されたKdV方程式を扱い，有限体上でのソリトン解の具体形とその周期を求めた．ついで，それらを局所体（p進数体）上で考察し，almost good reduction(AGR) と名づけた良い性質を持つことを見た．これは標数0の体上で考えられてきた特異値閉じ込めの，数論的な類似物であり，この性質を応用して有限体上の特殊解を具体的に構成した．

（5）以上は研究代表者が主として行った研究成果をまとめたものである．連携研究者の得た研究成果として，本研究に関わるものとして以下のものがあげられる．①トロピカル曲線上の代数幾何学を援用し，拡張された周期箱玉系の初期値問題を解いた．②超離散KdV方程式の初期値問題を，超離散頂点作用素および背景解の構成により解いた．③非可換離散および超離散KP方程式を佐藤理論の立場から導出し，離散および超離散非可換sine-Gordon方程式のソリトン解を求めた．④量子可積分系とクラスター代数の対応をT-system,Y-systemのいくつかに関して示した．

## ５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　22 件）(すべて査読有)


① Masataka Kanki, Jun Mada and Tetsuji Tokihiro, “Soliton Solutions of a Generalized Discrete KdV Equation", J. Phys. Soc. Jpn. 81 084002 (5 pages) (2012). DOI: 10.1143/JPSJ.81.084002

② Yoshihiro Ohta, Akinobu Nishiyama, Yoichiro Wada, Yijun Ruan, Tatsuhiko Kodama, Takashi Tsuboi, Tetsuji Tokihiro and Sigeo Ihara, “A path preference cellular-automaton model for traffic flow through transit points and its application to the transcription process in biology", Phys. Rev. E 86, 021918 (11pages) (2012). DOI:10.1103/PhysRevE.86.021918

③ M. Kanki, J. Mada, K. M. Tamizhmani and T. Tokihiro, “Discrete Painleve II equation over finite fields", J. Phys. A: Math. Theor. 45 342001 (8pages) (2012). doi:10.1088/1751-8113/45/34/342001

④ Masataka Kanki, Jun Mada and Tetsuji Tokihiro, “Discrete Integrable Equations over Finite Fields", SIGMA 8 054 (12pages) (2012). http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.054

⑤ A S Carstea and T Takenawa, "A classification of two-dimensional integrable mappings and rational elliptic surfaces", J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 155206 (15pages). doi:10.1088/1751-8113/45/15/155206

⑥ S. Isojima, J. Satsuma and T. Tokihiro, “Direct ultradiscretization of Ai and Bi functions and special solutions to Painelevé II equation", J. Phys. A: Math. Theor. 45 155203 (13 pages) (2012). doi:10.1088/1751-8113/45/15/155203

⑦ Rei Inoue, Atsuo Kuniba and Taichiro Takagi, "Integrable structure of box-ball systems: crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry", J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 073001 (64pp). doi:10.1088/1751-8113/45/7/073001

⑧ B. Grammaticos, A. Ramani, J. Satsuma and R. Willox, "Discretising the Painlev´e equations `a la Hirota-Mickens"J. Math. Phys. 53, 023506 (2012) (24 pages) http://dx.doi.org/10.1063/1.3682240

⑨ J. Mada and T. Tokihiro, “Two point correlation functions for a periodic box-ball system", SIGMA 7, 027 (16 pages) (2011). http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2011.027

⑩ K. Matsuya and T. Tokihiro, “Existence and non-existence of global solutions for a discrete semilinear heat equation ", Discrete and Continuous Dynamical Systems 31, 209--220 (2011). doi:10.3934/dcds.2011.31.209

⑪ A. Nishiyama and T. Tokihiro, “Construction of an Isotropic Cellular Automaton for a Reaction-Diffusion Equation by Means of a Random Walk", J. Phys. Soc. Jpn., 80, No.5, 054003 (6p) (2011). DOI: 10.1143/JPSJ.80.054003.

⑫ B. GRAMMATICOS, A. RAMANI and R. WILLOX, "FOLDING TRANSFORMATIONS AND HKY MAPPINGS", Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 18, (2011) 75-85. DOI:10.1142/S1402925111001179

⑬ Masataka Kanki, Jun Mada and Tetsuji Tokihiro, “Conserved quantities and generalized solutions of the ultradiscrete KdV equation", J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 145202 (15

pages).
doi:10.1088/1751-8113/44/14/145202
⑭ A. Nishiyama, T. Tokihiro, M. Badoual and B. Grammaticos,"Modelling the morphology of migrating bacterial colonies", Physica D: Nonlinear Phenomena, **239**, 1573-1580 (2010). http://dx.doi.org/10.1016/j.bbr.2011.03.031
⑮ J. Mada and T. Tokihiro,"Correlation functions for a periodic box-ball system", J. Phys. A: Math. Theor. **43** 135205 (15 pages) (2010). doi:10.1088/1751-8113/43/13/135205
⑯ Ralph Willox, Yoichi Nakata, Junkichi Satsuma, Alfred Ramani and Basile Grammaticos, "Solving the ultradiscrete KdV equation", J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 482003 (7pages).
doi:10.1088/1751-8113/43/48/482003

〔学会発表〕(計 10件)
① Tetsuji Tokihiro: "Ultradiscrete KdV equation and Box-Ball System",Tropical Geometry and Integrable Systems, University of Glasgow, July 07-08 (2011).
② Tetsuji Tokihiro: On negative soliton solution to ultradiscrete KdV equation, The Seventh IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, The University of Georgia, Athens, GA USA,April 04-07 (2011).
③ Tetsuji Tokihiro: Correlation function for the periodic box-ball system, Satellite cinference of ICM 2010, Integrable Systems and Geometry, Pondicherry University, India, August 12-17 (2010).
④ Tetsuji Tokihiro: Correlation function of periodic box-ball system, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, Shaoxing, China, January 7--10 (2010).

〔図書〕(計 1件)
時弘哲治, 朝倉書店, 「箱玉系の数理」(2010) 177pages.

6．研究組織
(1)研究代表者
時弘 哲治 (TOKIHIRO TETSUJI )
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：10163966

(3)連携研究者
岡本 和夫 (OKAMOTO KAZUO )
東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授
研究者番号：40011720
Willox Ralph (UIROKKUSU RARUFU )
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：20361610
坂井 秀隆 (SAKAI HIDETAKA )
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：50323465
泉 誠 (IZUMI MAKOTO )
島根大学・教育学部・教授
研究者番号：50263497
竹縄 知之 (TAKENAWA TOMOYUKI )
東京海洋大学・海洋工学部・准教授
研究者番号：70361805
井上 玲 (INOUE REI )
千葉大学・理学部・准教授
研究者番号：30431901