

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 29 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340038

研究課題名(和文) 微分方程式の rigidity・延長可能性と大域的構造の解析

研究課題名(英文) Rigidity and prolongability of differential equations and the study of global structure

研究代表者

原岡 喜重 (Haraoka, Yoshishige)

熊本大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：30208665

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,500,000円、(間接経費) 3,750,000円

研究成果の概要(和文)：線形常微分方程式および多変数のholonomic系に対して、rigidity・スペクトルタイプ
の概念やmiddle convolutionという操作を用いて大域解析を行う枠組みを構築した。Holonomic系については、middle convolutionによって方程式の間に対応がつけられることを見出し、構造を入れることができた。ある場合にはmiddle convolutionは常微分方程式とholonomic系を結びつける働きをするため、その結びつきを通して様々な構造が解析できることもわかった。

研究成果の概要(英文)：We constructed a framework for the global study of linear ordinary differential equations and holonomic systems in several variables by using the notion of rigidity and spectral types and the operation called middle convolution. We succeeded to define the middle convolution for holonomic systems, which brings a new structure on the moduli space of holonomic systems. In some cases, middle convolution connects an ordinary differential equation to a holonomic system, and then we can compare various structures among ODEs and holonomic systems.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：大域解析 複素領域における微分方程式 モノドロミー 完全積分可能系 アクセサリー・パラメータ
- 超曲面 rigid局所系 接続係数

1. 研究開始当初の背景

Fuchs 型常微分方程式 (複素射影直線上確定特異点のみを持つ線形常微分方程式) は、解析学のみならず、数論・代数幾何学・微分幾何学・表現論・数理物理学など数学・物理学の多くの分野において重要な役割を果たす基本的対象で、その大域構造の解明はそれぞれの分野に新しい進展をもたらすと考えられる。Fuchs 型常微分方程式の基本理論はおよそ 100 年ほど前に大きく整備されたが、その主要部分は局所理論であり、大域構造についてはほとんど解析する手立てがない状態であった。ただし rigid な (アクセサリー・パラメーターのない) 方程式に対しては、モノドロミーや接続係数といった大域的な量が明示的に求められることが徐々に分かってきていた。

N. M. Katz による rigid 局所系の理論は 1996 年に出版され、rigid な Fuchs 型常微分方程式の研究に著しい進展をもたらした。Katz 理論で重要なのは rigidity 指数と middle convolution である。Rigidity 指数は方程式がどれくらい変形可能かを定量的に表す指標で、方程式が rigid であるための効果的な判定方法を与える。Middle convolution は方程式の変換であり、rigidity 指数はその不変量となる。これらの概念・操作によって、Fuchs 型常微分方程式全体のなす空間の構造を解析する手懸かりが得られると期待された。

微分方程式の変形理論は非常に活発に研究されている分野である。変形は方程式のなす moduli 空間上の運動ととらえられることから、代数幾何学を用いて moduli 空間を記述するという研究が、齋藤政彦らを中心に精力的に進められていた。このような研究と Katz 理論とをうまく組み合わせることができれば、大きな進展が期待される。すでに我々は、middle convolution が変形方程式を不変に保つことを示し (原岡-Filipuk), Katz 理論と変形理論の相性の良さを見出していた。

他方、多変数の線形完全積分可能系の研究は、holonomic 系の理論 (一般論) と Gelfand らによる多変数超幾何関数など特殊関数の理論とが、いずれも大きく進展して、豊かな内容を作り上げていた。特に GKZ 超幾何関数は、表現論・組合せ論・代数幾何学などと深い関わりを持っていて、複合的な新しい研究領域となりつつあった。しかしこのような特殊関数的な holonomic 系以外に、変形可能な holonomic 系が存在するのか、ということに関しては、ほとんど意味のある考察は行われていなかったように思われる。我々は Katz による rigidity の概念が holonomic 系に対しても自然に定義され、有用であることに気づいていた。古典的な特殊関数として知られる Appell の F_4 について、そのモノドロミー表現が rigid であることを示したが (原岡-上野)、このようなごく自然なテーマはそれまで設

定されたこともなかったと思われる。我々はこの研究を通して、変形可能な holonomic 系は非常に存在しにくいのではないかと、という感触を得ることができた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、Fuchs 型常微分方程式の大域挙動を、rigidity の視点から、特に多変数 holonomic 系の rigidity と関連づけることで解析する手法を見出すことである。

前述のように、Fuchs 型常微分方程式は数学・物理学の様々な分野に現れるが、そのような出自を持つものは rigid であるか、あるいはアクセサリー・パラメーターの値が特定されているものであることが多い。たとえば orbifold の一意化に現れる Schwarz 微分方程式は、そのアクセサリー・パラメーターの値が一意的に定まることが示されている (ただしその値自体はまだ特定されていない)。このような状況を見ると、rigid ではない方程式に対して、何らかの条件によってアクセサリー・パラメーターの値が決定されるという現象が広く存在し、そのメカニズムを研究することは理論的にも応用上も非常に重要なテーマであると思われる。そのメカニズムの一つとして、holonomic 系への延長可能性はかなり有用なものとなることが期待される。延長可能性は具体的な検証が可能であり、一方延長された holonomic 系は rigid であることが予想されるので、アクセサリー・パラメーターの値の特定につながると考えられるからである。

3. 研究の方法

(1) Fuchs 型常微分方程式や多変数の holonomic 系は、数学・物理学の様々な分野に具体的な方程式が現れ、それぞれの視点から挙動の解析が行われている。それらの成果を俯瞰し、rigidity や延長可能性の観点から整理することで共通の構造を見出し、それを元に大域構造の解析方法を追求していく。Katz 理論に加えて、横山利章による Fuchs 型常微分方程式の構成理論もあり、そのような既存の理論を包含する形での理論構成を目指す。

(2) Katz 理論における rigidity 指数と middle convolution の概念は、rigid でない方程式の研究にも有用と考えられる。そのため特に middle convolution に基づいて Fuchs 型常微分方程式の大域構造を調べる手法を追求する。

さらにこれらの概念を、可能であれば多変数の holonomic 系にも導入し、モノドロミー・接続係数・変形といった大域的な解析を行う枠組みの構築を行う。多変数の場合には、特異点集合の幾何学的性質が大域構造を規定するため、rigidity 指数に幾何学的な情報盛り込むことが大きな課題となる。

(3) 本研究に関連する分野は多岐にわたる。それらの分野の知見を取り入れ、交流を促進

することが重要であるため、研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」「Workshop on Accessory Parameters」を定期的開催する。これらの研究会では成果発表に限らず、研究テーマの設定や研究紹介なども取り入れて、研究分野としての成長と、特に若手研究者の育成も目指していく。

機会を捉えて、様々な分野の国内外の研究集会に参加し、成果発表などを通して研究交流を行う。研究代表者・連携研究者により定期的なセミナー・研究打合せを行い、具体的事例の研究、最新の研究動向の紹介などを行いながら研究成果を積み上げていく。

4. 研究成果

(1) 複素鏡映群に由来する holonomic 系の構成

加藤満生は、いくつかの有限複素鏡映群に対して、それをモノドロミーに持つ常微分方程式を構成していたが、そこに現れる特異点の位置を新しい変数と考えると、その方程式は自然に holonomic 系に延長できることが分かった。この考察を元に、すべての有限複素鏡映群に対して、それをモノドロミーとして持つ holonomic 系で generic なものが存在することを示すことができた(論文)。

この結果を敷衍し、さらに齋藤恭司による自由因子の理論と結びつけることで、加藤は関口次郎とともに、3次元有限複素鏡映群の判別式で決まる超曲面を特異点集合とするような holonomic 系の構成に成功した(論文)。原岡は、その超曲面の補空間の基本群の表示を用いて、加藤-関口の holonomic 系に対するモノドロミー表現がほぼ rigid となることを見出し、表現を具体的に構成している。

(2) 代数多様体のトポロジーと holonomic 系の大域解析

加藤-関口の holonomic 系の場合と同様に、超曲面の補空間の基本群は、その超曲面を特異点集合とする holonomic 系の大域構造を強く規定する。たとえば超曲面として正規交差の超平面配置を考えると、基本群は可換となるため、holonomic 系は可約となり、解は初等関数を用いて表される。超曲面(代数多様体、あるいは超平面配置)について、このような興味からの研究はほとんど行われていないように思われ、一般的枠組みがなかったため、具体的な超平面配置について、それを特異点集合とする holonomic 系の大域解析を進めることとした。

この研究はまだ途上であるが、超平面配置とともに、holonomic 系の階数、および拡張平面におけるスペクトルタイプを指定すると、局所系の存在の仕方がほぼ決定されることが分かってきた。さらに局所モノドロミーの固有値に対する非自明な条件が通常現れ、その条件をみたさないと局所系が存在しないという状況にあるようである。

この方向の研究は超平面配置・代数幾何

学・表現論など様々な分野の研究者の興味をひいており、今後大きな研究テーマに成長していくことが期待される。

(3) Holonomic 系に対する middle convolution

超平面配置を対数的特異点集合に持つ holonomic 系に対しては middle convolution (以下 mc と略記)が定義され、常微分方程式の場合と同様な様々な性質をみたすことを示した。特にこの操作によって、holonomic 系が次々と構成できることはきわめて重要である。たとえば Appell の多変数超幾何関数については、 F_1 は階数 1 の局所系の切断から mc により得られ、 F_2, F_3, F_4 も F_1 を元にした mc の結果として得られることが判明した。このメカニズムは一般の状況で成立するので、特に rigid で 4 点以上の特異点を持つ常微分方程式からは、mc によって必ず多変数 holonomic 系が構成できることが分かる。この視点は holonomic 系の研究に新しい展開をもたらすと考えられ、今後大きく発展するテーマになると考えられる。

超平面配置に限らず、一般に超曲面を特異点集合とする場合にも、mc が定義できることが分かった。この結果はまだ新しく、今後の肉付けを待つ状態であるが、微分方程式論からも、超曲面を考察する位相幾何学・代数幾何学の立場からも、新しい展望を与えるものと考えられる。

Holonomic 系に対する mc だけでなく、モノドロミーに対する mc を定義することもできた。これも新たな基本群の既約表現を構成する手法を与えたことになり、幾何学的にも興味深い結果と考えられる。

以上の結果は、特殊関数論・微分方程式論・代数幾何学・位相幾何学をはじめ様々な分野の、今後の大きな発展につながる基盤を与えたものと判断される。

(4) 延長可能性を用いた大域解析

常微分方程式の延長は、通常は微分方程式の変形とほぼ同意義であるが、特異点の個数が 3 点の場合には変形パラメーターが存在しないため、通常の変形を考えることができない。この場合に、常微分方程式を、singular locus への制限として与えるような holonomic 系が存在するなら、それを延長と定義することが可能である。このようにして延長を変形の拡張概念として定式化することを提唱した。

この拡張した意味における延長によって、アクセサリー・パラメーターの値が特定される、という事象を見出した。延長可能性が常微分方程式の大域解析につながる事例として、興味深い結果と思われる(論文)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計39件)

Toshiaki Yokoyama, Recursive calculation of connection formulas for systems of differential equations of Okubo normal form, Journal of Dynamical and Control Systems, 査読有, 20, 2014, 241-292
DOI: 10.1007/s10883-014.9220-0

Mitsuo Kato and Jiro Sekiguchi, Uniformization systems of equations with singularities along the discriminant sets of complex reflection groups of rank three, Kyushu J. Math., 査読有, 68, 2014, 181-221
DOI: 10.2206/kyushujm.68.181

Yoshishige Haraoka, Prolongability of ordinary differential equations, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 査読有, 20 Supplement 1, 2013, 70-84
DOI: 10.1080/14029251.2013.862435

Toshio Oshima, Classification of Fuchsian systems and their connection problem, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, 37, 2013, 163-192

Katsuhisa Mimachi, The connection problem associated with a Selberg type integral and the q-Racah polynomials, Forum Math., 査読有, 25, 2013, 1127-1179
DOI: 10.515/FORM2011.139

Yoshishige Haraoka, Regular coordinates and deformation equations for Fuchsian systems, Banach Center Publications, 査読有, 97, 2012, 39-58
DOI: 10.4064/bc97-0-3

Kazuki Hiroe and Toshio Oshima, A classification of roots of symmetric Kac-Moody root systems and its application, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 査読有, 40, Symmetries, Integrable Systems and Representations, 2012, 195-241

Mitsuo Kato, Connection formulas and irreducibility conditions for Appell's F_2 , Kyushu J. Math., 査読有, 66, 2012, 325-363
DOI: 10.2206/Kyushujm.66.325

Yoshishige Haraoka and Sho Hamaguchi, Topological theory for Selberg type integral associated with rigid Fuchsian systems, Math. Ann., 査読有, 353, 2012, 1239-1271
DOI: 10.1007/s00208-011-0717-5

Yoshishige Haraoka, Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangement, Adv. Stud. Pure Math., 査読有, 62, 2012, 109-136

Katsuhisa Mimachi, Solutions for some families of Fuchsian differential equations free from accessory parameters in terms of the integral of Euler type, Adv. Stud. Pure Math., 査読有, 62, 2012, 233-260

Yoshishige Haraoka and Katsuhisa Mimachi, A connection problem for Simpson's

even family of rank four, Funk. Ekvac., 査読有, 54, 2011, 495-515

原岡喜重, 大域解析可能な Fuchs 型方程式, 数学, 査読有, 63, 2011, 257-280

Hironobu Kimura, On Wronskian determinant formulas of the general hypergeometric functions, Tokyo J. Math., 査読有, 34, 2011, 507-524

Yoshishige Haraoka and Mitsuo Kato, Generating systems for finite irreducible complex reflection groups, Funk. Ekvac., 査読有, 53, 2010, 435-488

Toshio Oshima and Nobukazu Shimeno, Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B20, 2010, 129-162

原岡喜重, 微分方程式の延長と middle convolution, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1662, 2009, 88-94

田邊 晋, Hypergeometric groups for complete intersections associated to Calabi-Yau varieties in weighted projective spaces, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1662, 2009, 1-19

[学会発表](計68件)

原岡喜重, ゲージ理論とアクセサリー・パラメーター, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2014.3.8, 熊本大学理学部

原岡喜重, Rigid holonomic systems, 研究集会「第9回代数・解析・幾何学セミナー」, 2014.2.17, 鹿児島大学理学部

大島利雄, 多項式係数の線型常微分方程式, 日本数学会秋期総合分科会総合講演, 2013.9.25, 愛媛大学

Yoshishige Haraoka, Rigidity of local systems over complement spaces, 研究集会「Moduli Theory in Algebraic Geometry and Integrable Systems」, 2013.9.20, 京都大学数理解析研究所

原岡喜重, Holonomic 系に対する middle convolution, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2013.9.17, 東京大学玉原国際セミナーハウス

Yoshishige Haraoka, On construction of holonomic systems, 研究集会「Global Study of Differential Equations in the Complex Domain, Polish-Japanese research group」, 2013.9.2, Banach Center, Warsaw, Poland

Yoshishige Haraoka, Rigidity of holonomic systems in several variables, 研究集会「Formal and Analytic Solutions of Differential, Difference and Discrete Equations」, 2013.8.27, Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland

原岡喜重, 完全積分可能系と超曲面の補空間の幾何, 研究集会「代数多様体のトポロジーとその周辺」, 2013.8.21, 北海道大学

理学部

大島利雄, 多項式係数の線型常微分方程式と特殊関数, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2012.12.15,16, 京都大学理学部

Yoshishige Haraoka, Rigidity of local systems on $P^n \setminus$ hypersurface, 研究集会「Workshop on Free Divisors and Differential Equations」, 2012.11.6, 東京農工大学

加藤文元, Accessory parameters in degenerations, 研究集会「Symposium on Arithmetic & Geometry」, 2012.6.2, 九州大学

加藤文元, アクセサリー・パラメーターと退化, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2012.3.15, 熊本大学理学部

原岡喜重, Fuchs 型方程式の接続問題 I, II, 研究集会「ボレル総和法と接続問題」, 2012.3.7,8, 広島大学理学部

Yoshishige Haraoka, Regular coordinates and reduction of deformation equations for Fuchsian systems, 研究集会「Formal and Analytic Solutions of Differential Equations II」, 2011.8.11, Mathematical Research and Conference Center, Bedlewo, Poland

Yoshishige Haraoka, Monodromy of rank 3 completely integrable systems singular along free divisors, 研究集会「Workshop on Free Divisors」, 2011.5.31, University of Warwick, Coventry, UK

加藤満生, Monodromy representations of uniformization equations of rank three, 研究集会「Workshop on Geometry and Analysis of Discriminants」, 2011.2.8, 東京大学数物連携宇宙研究機構

原岡喜重, 微分方程式サイドから見た共形場理論, 研究集会「Workshop on Accessory Parameters」, 2010.10.10, 東京大学玉原国際セミナーハウス

大島利雄, 特殊関数と代数的常微分方程式, 日本数学会年会企画特別講演, 2010.3.27, 慶應義塾大学理工学部

田邊晋, 完全交叉孤立特異点に付随した Gauss-Manin 系と齋藤自由因子, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2010.3.17, 熊本大学理学部

加藤満生, 複素鏡映群の discriminant から決まる微分方程式, 研究集会「アクセサリー・パラメーター研究会」, 2010.3.16, 熊本大学理学部

⑲ Yoshishige Haraoka, Arrangement of hyperplanes arising from sections of rigid local systems, 研究集会「MSJ-SI 2009 on Arrangements of Hyperplanes」, 2009.8.11, 北海道大学学術交流会館

⑳ Toshio Oshima, Fractional calculus of Weyl algebra and its application, 研究集会「Representation Theory of Real Reductive Groups」, 2009.7.30, The

University of Uta, USA

㉑ Yoshishige Haraoka, Prolongation and middle convolution of Fuchsian systems, 研究集会「Non-abelian Hodge Theory and Geometry of Twister Structure」, 2009.7.13, 京都大学数理解析研究所

㉒ Taizo Sadahiro, Domino tilings with diagonal impurities, 研究集会「Workshop on Accessory Parameters」, 2009.6.19, 東京大学玉原国際セミナーハウス

〔図書〕(計 3件)

Toshio Oshima, Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, MSJ Memoirs, vol. 28, 2012, Mathematical Society of Japan, 203 pages

大島利雄, 特殊関数と代数的線型常微分方程式, 東京大学数理科学レクチャーノート, 2011, 東京大学大学院数理科学研究科, 111 pages

〔産業財産権〕
なし

〔その他〕
ホームページ:

<http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~haraoka/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

原岡 喜重 (HARAOKA, Yoshishige)

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 30208665

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

横山 利章 (YOKOYAMA, Toshiaki)

千葉工業大学・工学部・教授
研究者番号: 30210636

加藤 満生 (KATO, Mitsuo)

琉球大学・教育学部・教授
研究者番号: 50045043

大島 利雄 (OSHIMA, Toshio)

城西大学・理学部・教授
研究者番号: 50011721

田邊 晋 (TANABE, Susumu)

Galatasaray 大学・教授
研究者番号: 90432997

(2010年度まで。2011年度からは海外研究協力者)

木村 弘信 (KIMURA, Hironobu)

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：40161575

示野 信一 (SHIMENO, Nobukazu)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号：60254140

貞廣 泰造 (SADAHIRO, Taizo)
津田塾大学・学芸学部・准教授
研究者番号：00280454

三町 勝久 (MIMACHI, Katsuhisa)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：40211594
(2011年度から)

加藤 文元 (KATO, Fumiharu)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：50294880
(2011年度から)