

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月30日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21340039

研究課題名（和文） 離散解析幾何学の発展と応用

研究課題名（英文） Development and applications of discrete geometric analysis

研究代表者

砂田 利一（SUNADA TOSHIKAZU）

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：20022741

研究成果の概要（和文）：

本研究の主要な目的は、結晶の形態分類に起源を持つ結晶学に数学的観点を供給することであった。方法としては、20世紀前半に開拓された代数的位相幾何学、特にホモロジー論と被覆写像の理論を用いている。さらに、離散幾何解析のフレームワークの中で、結晶構造に対する最小原理を用いて得られる最大対称性を有する「標準的実現」の概念に新たな知見を与えるとともに、そのアルゴリズムを構築した。これらの成果は、物質科学において重要な結晶デザインに大きく寄与している。また、標準的実現と離散的代数幾何学の深い関係を見出し、この分野の発展に貢献した。

研究成果の概要（英文）：

The primarily purpose of this project was to provide a mathematical insight into the modern crystallography, a typical practical science that originated in the classification of the observed shapes of crystals. The tools we employed are adopted from algebraic topology, a field in pure mathematics cultivated during the first half of the last century. More specifically the elementary theory of covering spaces and homology is effectively used in the study of 3D networks associated with crystals. Further we formulate a minimum principle for crystals in the framework of discrete geometric analysis, which provides us with the concept of standard realizations, a canonical way to place a given crystal structure in space so as to produce the most symmetric microscopic shape. In spite of its pure-mathematical nature, this concept combined with homology theory turns out to fit with a systematic design and enumeration of crystal structures, an area of considerable scientific interest for many years. Meanwhile, standard realizations show up in asymptotic behaviors of random walks on topological crystals, the abstraction of crystal structures, and are closely related to a discrete analogue of Abel-Jacobi maps in algebraic geometry.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2010年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2011年度	2,600,000	780,000	3,380,000
総計	8,100,000	2,430,000	10,530,000

研究分野： 位相的結晶理論

科研費の分科・細目：数物系・大域解析学

キーワード：離散幾何解析学、標準的実現、位相的結晶

1. 研究開始当初の背景

代表者は、これまで離散幾何解析学の創始および展開を行ってきた。この分野は様々な数学分野を融合しており、その応用も多岐に渡っている。研究開始当初には、その1つの応用として、結晶デザインの研究を目指していた。

2. 研究の目的

本研究では、結晶デザインを、数学の観点から研究し、特に系統的な結晶構造の「数え上げ」を目指した。

3. 研究の方法

離散幾何解析と代数的位相幾何学の手法を用いて結晶デザインの理論的基礎を構築した。

4. 研究成果

標準的実現による結晶デザインのアルゴリズム開発と、離散的代数幾何学との関連を見出した。その詳細はシュプリンガーから英文の著作として出版予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

[1] T. Sunada, Lecture on topological crystallography, Japan. J. Math. 7 (2012), 1—39.

[2] T. Sunada and T. Tate, Asymptotic behavior of quantum walks on the line, Journal of Functional Analysis, 262 (2012), 2608—2645.

[3] Y. Higuchi, T. Matsumoto, O. Ogurusu, On the spectrum of a discrete Laplacian on  $\mathbb{Z}$  with finitely supported potential, Linear and Multilinear Algebra, 59 (2011), 917—927.

[4] T. Tate, Asymptotic Euler–Maclaurin formula over lattice polytopes, *Journal of Functional Analysis*, 260 (2010), 501-540.

[5] T. Tate, A spectral analogue of the Meinardus theorem on asymptotics of the number of partitions, *Asymptotic Analysis*, 67 (2010), 101-123.

[6] T. Sunada and H. Urakawa, Ray-Singer zeta functions for compact flat manifolds, *Contemporary Math.* 284 (2009), 287-294.

[7] M. Itoh, M. Kotani, H. Naito, T. Sunada, Y. Kawazoe, and T. Adschiri, New metallic carbon crystal, *Phys. Rev. Lett.* 102 (2009), 055703-4.

[8] Y. Higuchi and Y. Nomura, Spectral structure of the Laplacian on a covering graph, *European Journal of Combinatorics*, 30 (2009), 570-585.

[学会発表] (計 2 件)

[1] T. Sunada, Topological Crystallography, *International Conference on Mathematical Crystallography*, November 11, 2011, Manila

[2] T. Sunada, Quantum Walks, ICMA2010, Dec. 9, 2010

[図書] (計 2 件)

[1] 砂田利一, 新版 バナッハ・タルスキーのパラドックス, 岩波書店, 2009

[2] 砂田利一, 現代幾何学への道, 岩波書店, 2010

[産業財産権]  
○出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

○取得状況 (計◇件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

[その他]  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

砂田 利一 (SUNADA TOSHIKAZU)  
明治大学・理工学部・教授  
研究者番号 : 20022741

### (2)研究分担者

楯 辰哉 (TATE TATSUYA)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授  
研究者番号 : 00317299

樋口 雄介 (HIGUCHI YUSUKE)

昭和大学・教養部・講師

研究者番号：20286842

阿原 一志 (AHARA KAZUSHI)

明治大学・理工学部・准教授

研究者番号：30247147