

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340109

研究課題名(和文) 超弦理論のコンパクト化における数学と物理学のコラボレーション

研究課題名(英文) Collaboration of Mathematics and Physics for Superstring Compactifications

研究代表者

堀 健太郎 (Hori, Kentaro)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・特任教授

研究者番号：30535042

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,600,000円、(間接経費) 4,380,000円

研究成果の概要(和文)：2次元の超対称ゲージ理論において新しい種類の双対性を発見した。この双対性を用いることにより、超弦理論の新たな真空を構成し、更にDブレーンの圏に関する数学的予想を提唱した。また、これらゲージ理論の分配関数を厳密に計算することに成功し、Dブレーンの中心電荷及び楕円種数の一般表式を得た。さらに、Dブレーン上の自由度を決定する一般則を得、DブレーンへのT双対性の作用則を証明した。これらの成果により、超弦理論のコンパクト化の真空構造や低エネルギー有効理論を調べるための新たな方法が確立された。

研究成果の概要(英文)：We discovered a new class of duality in two dimensional supersymmetric gauge theories. Employing the duality, we constructed a new class of superstring vacua, and provided mathematical conjectures on D-brane categories. Also, we succeeded in exactly computing the partition functions of such gauge theories, and obtained a general formula for the D-brane central charge and the elliptic genera. In addition, we obtained a general rule to determine the degrees of freedom on D-branes and gave a proof of the rule of T-duality action on D-branes. By these results, a new method to study the vacuum structure and the low energy effective theory of superstring compactifications is established.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：数理物理 超弦理論 素粒子論 幾何学 双対性 ゲージ理論 Dブレーン

### 1. 研究開始当初の背景

研究代表者の研究は以下の二つの問いに動機づけられている: 「自然界の基本法則は何か?」、「それを記述するためにどんな数学が用いられるのか?」自然界の基本法則は一般相対論と量子力学を統合するようなものでなくてはならない。そしてそのような法則は一般相対論と量子力学と共に生まれ、独自に成長して来た数学の分野を統一するような言葉で記述されるのではないか。本研究課題はこのような問題意識を背景として持っている。

### 2. 研究の目的

一般相対論と量子力学を統合するような自然界の基本法則を探しだすことは物理学の重要な課題であり、超弦理論はその理論的枠組として最も有力な候補である。この研究の目的は、4次元  $N=1$  超対称性を持つコンパクト化の全体像を把握し、それらの低エネルギー理論を理解するための方法を発展させることである。更に理論を記述するために最も適した数学を探求もしくは開拓することも目指している。研究期間内には、D プレーン上に実現される理論を重点的に調べる予定である。この研究は超対称ゲージ理論、トポロジカルな弦理論、ミラー対称性等の深い理解を促進するとともに現象論や宇宙論への重要な応用があると期待される。

### 3. 研究の方法

研究は日々の思索、それに伴う思考実験や計算、研究仲間との勉強会や議論、セミナーや研究集会の開催、研究集会等での発表に伴う議論、などを組み合わせて行った。科研費は主に、研究者の招聘、国際会議の開催、研究集会への参加、に用いられた。以下に特筆すべき事項を挙げる。

#### (1) 開催した国際会議

研究代表者は、所属するカブリ数物連携宇宙研究機構において組織委員として以下の会議を開催した。

Geometry and Physics of the Landau-Ginzburg Models, 2012年6月25日-29日, 共同組織委員: 斎藤恭司 (IPMU), Todor Milanov (IPMU).  
<http://member.ipmu.jp/lgm2012/>

Homological Projective Duality and Quantum Gauge Theory, 2012年11月12日-16日, 共同組織委員: Ludmil Katzarkov (Univ. of Miami, Univ. of Vienna).  
<http://www.ipmu.jp/node/1427>  
[http://www.ipmu.jp/webfm\\_send/758](http://www.ipmu.jp/webfm_send/758)

この会議は「研究成果」で述べる(3)と(4)の過渡期に行われ、本研究課題に重要な影響を及ぼした。まず、(3)の第1論文の結果の数学的意味合いを多くの参加者と議論することが出来た。また、(3)の第2論文の完成の

ために必要な技術的問題を解く方法を参加者から得ることが出来た。さらに、参加者の講演とそれに続く議論の中で(4)の強力な動機付けが得られた。

Primitive forms and related subjects, 2014年2月10日-14日, 共同組織委員: 斎藤恭司 (IPMU), Si Li (Boston Univ.), Changzheng Li (IPMU).  
[http://www.ipmu.jp/webfm\\_send/961](http://www.ipmu.jp/webfm_send/961)

#### (2) 招聘した研究者

研究代表者は主に国外から多くの研究者を招聘し、本研究課題に役立てるとともに、所属研究機関及び他の国内の研究者へ利益を還元した。以下に数例を挙げる。

Wolfgang Lerche (行列分解によるD プレーンの記述・解析の創始者・「研究成果」の(1),(2),(4)-に役立った。), Yongbin Ruan (Gromov-Witten 不変量の創始者。(3),(4),(5)), Dmitry Tamarkin (A プレーンの新たな記述法について学んだ。(1),(2)), Krzysztof Gawedzki (H場がある場合のT 双対性について議論。(2)), Constantin Teleman (ゲージ化への圏論的アプローチについて議論。(3),(4),(5)), Alexander Kuznetsov (ホモロジカルな射影双対の提唱者・ゲージ理論の双対性との関係を議論。(3),(4)), Piljin Yi (1次元指数に関する共同研究)。

#### 4. 研究成果

(1) オリエンティフォールド理論におけるD プレーン上の自由度の決定

(論文, Dongfeng Gao との共同研究)

オリエンティフォールドは超弦理論から万物の理論を導く鍵となるコンパクト化において欠かせない要素であるが、その重要性にも関わらず、これまでそこでのD プレーン上の自由度 (ゲージ場、物質場等) を決定する一般則が知られていなかった。この研究はこれを導き出すものである。また、オリエンティフォールド理論自体を分類することにも成功した。この研究成果は超弦理論において基礎的、普遍的な価値を持つものであるが、特に  $N=1$  超対称性を持つ4次元へのコンパクト化を系統的に構成、解析するための重要なステップと考えることができる。実際この研究では、低エネルギー理論の解析のための準備として、D プレーンの圏論的な記述法を開発し、束縛状態の安定性もしくはその崩壊過程についての議論を展開した。更に、オリエンティフォールド理論におけるD プレーンのトポロジーをK理論を用いて分類することは10年来の課題であったが、これにも成功した。

(2) D プレーンへのT 双対性の作用

(学会発表)

T 双対性がD プレーンにフーリエ向井変換

のように作用することは 1999 年に私自身により D プレーン上の有効理論を用いて示されている。この研究ではそれを弦の世界面の理論を用いて第一原理から証明することに成功した。この成果は 超弦理論において基礎的、普遍的な価値を持つと同時に、 $N=1$  超対称性を持つ 4 次元へのコンパクト化の様々な実現法の相互関係を明らかにするという応用を持っている。

### (3) 2 次元超対称ゲージ理論の双対性

(論文 と , 後者は Johanna Knapp との共同研究)

1995 年に N. Seiberg は 4 次元  $N=1$  超対称ゲージ理論における新たな双対性を発見した。類似の双対性は 3 次元  $N=2$  超対称ゲージ理論において見つかっている。第一論文では 2 次元  $N=(2,2)$  超対称ゲージ理論における新たな双対性を発見した。実はこの発見は数学と物理の相互作用の中から生まれた。それは数学における「圏」の言葉が D プレーンを記述するのに適しているという認識に端を発している。この関係において、物理における当たり前の事実は「圏同値」などの証明すべき数学的予想を導き出し、逆に数学における結果は物理を理解するヒントを与える。本研究における双対性は数学で出て来た圏同値を物理的に理解しようとする試みの中で発見された。この双対性は「線形シグマ模型」と呼ばれるゲージ理論に適用され、超弦理論の解を与える 2 次元  $(2,2)$  超共形場の理論の新たな理解に繋がった。

第二論文 では、この双対性を更に応用し、新たな超弦理論の解を系統的に構成し、また、圏同値に関する新たな数学的予想を提唱した。新たな解の探索の中で、その存在が予想されていた 3 次元カラビ・ヤウ多様体を具体的に構成することに初めて成功した。さらに、解の系統的構成の中で、完全に異なる二つの超共形場の理論が同一のモジュライ空間を持つという驚くべき現象を発見した。

以上の成果は「 $N=1$  超対称コンパクト化の全体像を把握し、低エネルギー理論を理解するための方法を発展させること、理論を記述するために最も適した数学を探索もしくは開拓すること、を目指す」とした研究目的に向かう大きな進歩である。また、Seiberg 的 双対性が数学に応用されたのはこの研究が初めてである。そこから出て来た圏同値を見ると、A. Kuznetsov の提唱するホモロジカルな射影双対にフィットするものが含まれることが分る。これは Seiberg 双対性と射影双対の間に密接な関係があることを示唆しており、さらなる深い理解を目指す動機づけを与えている。

### (4) 2 次元超対称ゲージ理論における厳密計算

2 次元  $(2,2)$  超対称ゲージ理論の半球面及びトラス上の分配函数を超対称局所化

の方法を用いて計算した。得られた結果は線形シグマ模型に応用され、赤外極限に現れる  $(2,2)$  超対称共形場の理論についての重要な情報を読み取ることが出来るようになった。これにより超弦理論の真空構造を調べる新たな方法が確立された。以下に重要なポイントを記述する。

### 半球面上の分配函数と D プレーン中心電荷 (論文 , Mauricio Romo との共同研究)

半球面上の分配函数は境界に置いた D プレーンの中心電荷の一般表式を与えることが観測された。結果はガンマ函数の積分という形で与えられ、その収束条件が相境界上の D プレーンに対する「次数制限則」を与えることが分った。また、D プレーンの中心電荷の諸相での表式や繰り込み群のもとでの振る舞いが明らかになり、球面上の分配函数が二つの半球面上の分配函数に分割されることも分った。超局所化の方法が境界のある多様体に適用されたのはこの研究が初めてである。この経験は高次元のゲージ理論における厳密計算にも生かすことが出来ると期待される。

### トラス上の分配函数と楕円種数

(論文 と , Francesco Benini, Richard Eager, 立川裕二との共同研究)

R 対称性によるひねりを加えたトラス上の分配函数は赤外極限に現れる超対称共形場の理論の楕円種数を与える。結果はトラス上の平坦接続のモジュライ空間における meromorphic な微分形式の留数積分として与えられる。この一般表式により、これまで限られた場合にしか分らなかったスペクトラムに関する情報が分るようになった。さらに、大きな自由度を持った理論に適用することにより、ブラックホールのエントロピーを含む超弦理論の重力的側面への応用が出来ると期待される。

### (5) ミラー対称性

(学会発表 )

ミラー対称性は 2 次元  $(2,2)$  超対称場の理論における双対性であり、特に「シンプレクティック幾何」と「複素幾何・代数幾何」をつなぐという驚くべき数学的性質を持つものである。これを理解する方法として線形シグマ模型を用いる方法がある。これはゲージ群が可換群の場合には成功している(研究代表者と Cumrun Vafa の共同研究)が、非可換群の場合には未だに良く分っていない。この問題へのアプローチとして 3 次元のミラー対称性から出発する方法を発展させた。特に、グラスマン多様体に対応する線形シグマ模型において、3 次元理論を円上にコンパクト化することにより、3 次元におけるミラー対称性から 2 次元におけるミラー対称性の主要な部分(Eguchi-Hori-Xiong のスーパーポテンシャル)が導出できることを示した。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

Kentaro Hori, Chan. Y. Park, Yuji Tachikawa, “2d SCFT from M2-branes” JHEP 1311 (2013) 147, 査読有り, DOI: 10.1007/JHEP11(2013)147

Kentaro Hori, Johanna Knapp, “Linear sigma models with strongly coupled phases - one parameter models” JHEP 1311 (2013) 070, 査読有り, DOI:10.1007/JHEP11(2013)070

Francesco Benini, Richard Eager, Kentaro Hori, Yuji Tachikawa, “Elliptic genera of 2d N=2 gauge theories” Communications in Mathematical Physics (掲載確定), 査読有り.

Kentaro Hori, Mauricio Romo, “Exact results in two-dimensional (2,2) supersymmetric gauge theories with boundary” 査読無し, (2013) arXiv:1308.2438

Francesco Benini, Richard Eager, Kentaro Hori, Yuji Tachikawa, “Elliptic genera of two-dimensional N=2 gauge theories with rank-one gauge groups” Lett. Math. Phys. 104 (2014) 465-493, 査読有り, DOI: 10.1007/s11005-013-0673-y

Kentaro Hori, “Duality in two-dimensional (2,2) supersymmetric non-Abelian gauge theories” JHEP 1310 (2013) 121, 査読有り, DOI: 10.1007/JHEP10(2013)121

Dongfeng Gao, Kentaro Hori, “On the structure of the Chan-Paton factors for D-branes in Type II orientifolds” (2010) 査読無し, arXiv:1004.3972

[学会発表](計17件)

堀健太郎, Grade restriction rule and

D-brane central charge 及び Linear sigma models with strongly coupled phases, 国際研究集会 Calabi-Yau manifolds, mirror symmetry and related topics, 2014年2月17日-21日, 東京大学, 日本.

堀健太郎, Exact results in two-dimensional (2,2) supersymmetric gauge theories with boundary, 国際会議 Rikkyo MathPhys 2014, 2014年1月11日-13日, 立教大学, 日本.

堀健太郎, Exact results in two-dimensional (2,2) supersymmetric gauge theories with boundary, 国際会議 Physics around Mirror Symmetry, 2013年10月21日-25日, ペリメター理論物理学研究所, カナダ.

堀健太郎, Supersymmetric localization in two dimensions, 国際会議 Geometry and Physics of Gauged Linear Sigma Model, 2013年3月4日-8日, ミシガン大学, 米国.

堀健太郎, Predictions on derived equivalences from 2d gauge theories(他2講演), 国際会議 Homological Projective Duality and Quantum Gauge Theory, 2012年11月12日-16日, カブリ数物連携宇宙研究機構, 日本.

堀健太郎, Introduction to string theory and its relation to gauge theories(他2講演), 国際会議 Relation of String Theory to Gauge Theories and Moduli Problems of Branes, 2012年9月10日-14日, ステクロフ数学研究所, ロシア.

堀健太郎, Mirror Symmetry: from 3d to 2d, 国際会議 Algebraic Topology, Field Theory and Strings, 2012年5月21日-25日, Simons Center for Geometry and Physics, 米国.

堀健太郎, Phases of Calabi-Yau Categories, 国際会議 Noncommutative Algebraic Geometry and D-branes, 2011年12月12日-16日, Simons Center for Geometry and Physics, 米国.

堀健太郎, Duality in Two-dimensional (2,2) Supersymmetric Non-Abelian Gauge Theories, 国際会議 String-Math 2011, 2011年6月6日-11日, ペンシルベニア大学, 米国.

堀健太郎, D-branes, T-duality, and Index Theory, Part II, 国際研究集会 Geometry, Quantum Fields, and Strings: Categorical Aspects, 2010年6月7日-11日, オーバーヴォルフアッハ数学研究所, ドイツ.

堀健太郎, Gauged Landau-Ginzburg Models, 国際会議 Geometry and Physics of the Landau-Ginzburg Model, 2010年5月31日-6月4日, フーリエ研究所, フランス.

堀健太郎, D-branes and categories, 国際会議 Interplay between Representation Theory and Geometry, 2010年5月3日-7日, 清華大学, 中国.

堀健太郎, On the structure of Chan-Paton factors in Type II orientifolds, 国際会議 Komaba 2010, Recent Developments in Strings and Fields, 2010年2月13日-14日, 東京大学, 日本。

堀健太郎, Mirror symmetry and reality, 国際会議 Homological Mirror Symmetry and Related Topics, 2010年1月18日-23日, マイアミ大学, 米国。

堀健太郎, Mirror symmetry and reality, 国際会議 Mirror Symmetry and Gromov-Witten Invariants, 2010年1月11日-15日, ソウル国立大学, 韓国。

堀健太郎, Linear sigma models with and without boundary, 国際会議 Geometry and Physics, 2009年8月10日-14日, 四川大学, 中国。

堀健太郎, Linear sigma models with non-Abelian gauge groups, 国際会議 Theorie de Gromov-Witten Equivariante et les Equations du Vortex, 2009年6月6日-10日, C.R.I.M., フランス。

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

堀 健太郎 (HORI, Kentaro)  
東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・  
特任教授  
研究者番号：30535042

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

江口 徹 (EGUCHI, Tohru)  
立教大学・理学部・特任教授  
研究者番号：20151970

### 大栗 博司 (OOGURI, Hiroshi)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・  
主任研究員  
研究者番号：20185234

### 深谷 賢治

京都大学・理学系研究科・教授  
研究者番号：30165261

### 斎藤 恭司

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・  
特任教授  
研究者番号：20012445