

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月11日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21500003

研究課題名（和文）計算機相互結合網に適したグラフ構造の構成と解析及びその応用

研究課題名（英文）Synthesis and analysis of graph structures for interconnection networks of computers and their applications

研究代表者

柴田 幸夫（SHIBATA YUKIO）

群馬大学・名誉教授

研究者番号：80008531

研究成果の概要（和文）：ハイパーキューブ、de Bruijn ダイグラフ、Kautz ダイグラフに関して、Cayley グラフ及び Cayley coset グラフの性質に関する研究で新しい結果を得た。de Bruijn ダイグラフ、Kautz ダイグラフ上でのマルチソースブロードキャストの問題を定義し、そのアルゴリズムを提案した。グラフの支配集合及び次数列についての新しい結果を得た。

研究成果の概要（英文）：New results on Cayley graph and Cayley coset graph properties of hypercubes, de Bruijn digraphs and Kautz digraphs are obtained. We proposed the multisource broadcasting on de Bruijn and Kautz digraphs and designed their algorithms. New results on dominating sets and degree sequences of graphs are obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,900,000	570,000	2,470,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：離散構造、de Bruijn グラフ、Kautz グラフ、Cayley グラフ、
ハイパーキューブ、ブロードキャスト、支配集合、次数列

1. 研究開始当初の背景

申請書に記載したものを記す。

a) Cayley グラフについて

ハイパーキューブは Cayley グラフであり、ハイパーキューブの変形グラフが数種類知られている。ハイパーキューブの変形族のグラフの対称性について調べている所であり、これまで調べた範囲内では変形族のグラフは Cayley グラフではないものが多く、Cayley グラフであるような変形族のグラフを見出すことを目標とする。

バタフライは Cayley グラフであることが知られているが、もとの群をより一般化することによりバタフライの一般化を試みる。

b) 距離について

グラフの種々の性質を距離を導入して考察するということが行われている。我々は、グラフ内の距離をもととして関係積を導入したが、本研究では距離を導入したラベリングである $L(2,1)$ ラベリングについて考察する。また、ネットワークの通信に応用を持つスパ

ナについて考察する。

c) 一般化について

de Bruijn グラフや Kautz グラフは合同式による一般化が今瀬らによって成されている。本研究では合同式をより幅広い形に拡張することにより一般化 de Bruijn グラフ、一般化 Kautz グラフの更なる一般化を検討する。

d) 埋め込みについて

私共はこれまで、de Bruijn グラフ他いくつかのグラフの（スタック形）本型埋め込みを行って来たが、本研究では、それを継続すると共に、キュー形本型埋め込みについて研究する。キュー形についてはこれまであまり研究がされておらず、新しい知見が得られるものと思っている。

e) 積について

グラフ上の距離にもとづいて関係積を導入したが、最近のグラフの研究の動向として単体のグラフを作るのではなく、いくつかのグラフから積を使って新しいグラフを構成することが行われている。その利点は作られたグラフの構造が規則的になることである。本研究では、積により構成されたグラフを他のグラフで分解する研究を行う。

f) アルゴリズムについて

ネットワーク上での情報散布とゴシッピングの中間的なモデルであるマルチソースブロードキャストのモデルを導入し、de Bruijn グラフ、Kautz グラフの上での情報散布について研究する。アルゴリズムの作製及び評価を行う。

アルゴリズムのもう一つのテーマとして、分散アルゴリズムの設計及び解析を行う。グラフの基本構造である木やサイクルを message passing model のもとで求める分散アルゴリズムを検討する。

g) 故障診断について

私共はこれまで de Bruijn グラフやハイパーキューブの変形族のグラフについて、その上での故障診断の研究を行い、また、PMCモデルの拡張である (t, k) 診断モデルを提案して来た。本研究では診断にあいまいさを導入する新しいモデルを定義してその上での故障ユニットの検出方法について研究する。

2. 研究の目的

研究期間内で何をどこまで明らかにしようとするのか

a) Cayley グラフについて

ハイパーキューブの変形族のグラフの対称性を調べ、対称なものは Cayley グラフであるか否かを調べる。Cayley グラフの場合には

群と生成元を明らかにする。更に、Cayley グラフは群と生成元が決まれば一意的に決まるものであるが、生成元の使用法に制限を加えてより多様なグラフを作り出す方法を与える。この方法により、これまで Cayley グラフの範囲に入っていなかったグラフについても群論的手法が扱えるようにする。

b) 距離について

$L(2, 1)$ ラベリングはまだ研究が始まってそれほど時間が経っていないので、多くの問題が考えられ、de Bruijn グラフ、Kautz グラフに対して効率的なラベリング法を開発する。スパナに対しても de Bruijn グラフ、Kautz グラフの周辺のグラフで効率の良い構成法を与える。

c) 一般化について

一般化 de Bruijn グラフや一般化 Kautz グラフを定義する合同式を拡張することにより、より広いグラフのクラスを定義し、これまで数論的方法で記述できなかったグラフを記述したり、新しいグラフを見出す。

d) 埋め込みについて

キュー形本型埋め込みを de Bruijn グラフ、Kautz グラフ等で実現し、そのページ数を探索する。

e) 積について

これまでに de Bruijn グラフ、Kautz グラフと他のグラフの積を分解する研究を行って来た。この研究を更に進めて新しい分解の方法を与える。

f) アルゴリズムについて

de Bruijn グラフ、Kautz グラフの上でのマルチソースブロードキャストアルゴリズムを構成し、その評価を行う。また、木やサイクルを求める分散アルゴリズムを設計し、解析を行う。

g) 故障診断について

あいまいさを導入した検査法を定義する。これにより、これまでよりも効率の良い検査法を作りあげることを目指す。

3. 研究の方法

研究目的にも書いたように、本研究では対象とするグラフが多く項目において共通であり、研究の方法論もグラフ理論的なもの、組合せ論的なもの、代数的なものである。これらを組み合わせて研究を行う。

平成 21 年度

研究目的に記述したキーワードに従って説明する。

a) Cayley グラフについて

ハイパーキューブの変形族の対称性を調べ、自己同型群を記述する。ハイパーキューブの自己同型群の構造はわかっているので (Harary) それをもととして検討することとなる。

Cayley グラフについてのもう一つの研究は、群の wreath 積及び直積による群の Cayley グラフの研究である。群の直積と wreath 積を組み合わせることにより既存のグラフよりもはるかに広い範囲のグラフを構成でき、de Bruijn グラフ、Kautz グラフ、バタフライ等のグラフの一般化を行う。

b) 距離について

$L(2, 1)$ ラベリングはラベル付けの条件に 2 点間の距離に関する条件を含むものである。我々の定義した関係積を使った $L(2, 1)$ ラベリングの研究が他の研究者によって始められており、本研究でも取り上げる予定である。de Bruijn グラフ、Kautz グラフの $L(2, 1)$ ラベリングを試みることから始める。その様子から次の方向を探る。

c) 一般化について

de Bruijn グラフ、Kautz グラフの合同式を使った一般化は今瀬らと他のグループにより独立に行われ、現在これが一般に使われている。我々が行おうとしているのは、合同式の形式及び個数を変えることにより、これまでの一般化 de Bruijn グラフや一般化 Kautz グラフを含む体系を構築しようというものである。21 年度は合同式の形の検討及びそれによって記述できるグラフのクラスを見出すことを行う。一つの目標は、これまで一般化 de Bruijn グラフや一般化 Kautz グラフの合同式では記述されえなかったグラフを新しい合同式で記述することである。このようなグラフと合同式を見出すことができれば、そのグラフはこれまでのグラフ理論的記述と整数論的記述の二通りの方法を持つこととなり、研究がはるかにやり易くなる。

d) 埋め込みについて

キュー型埋め込みを一般化 de Bruijn グラフ、一般化 Kautz グラフで試みる。キュー型埋め込みは新しいテーマであり、他でもあまり研究されていないので早急に実行したい。

e) 積について

グラフの積及び群の積の Cayley グラフに分けて述べる。

グラフの積については、これまでに関係積を導入し、グラフの積を幅広く見る方法を提案した。また、二種類のグラフの積を他のグラフにより分解することを行ってきたが、21 年度も de Bruijn 族のグラフと他のグラフの積 (デカルト積、クロネッカー積) によるグラ

フを分解する研究を行う。

群の積の Cayley グラフについては、群の wreath 積群の Cayley グラフについて考察する。これまで巡回群の wreath 積について扱ってきたが、21 年度もそれを継続する。

f) アルゴリズムについて

マルチソースブロードキャストリングは通常のブロードキャストリングとゴジッピングを含む広い範囲のモデルと考えられる。通常ブロードキャストリングは適当な全域木を作り、それに沿って情報を流すことが多いが、本研究では loop-rooted tree 及び 2 cycle-rooted tree r と呼ばれるグラフ構造を複数個作り、それに沿って複数個の情報を同時に流すことを行う。loop-rooted tree 及び 2 cycle-rooted tree は当研究室で見出された cycle-rooted tree の特殊なものであり、その応用研究である。21 年度は主として、このようなアルゴリズムに適したグラフ構造を de Bruijn グラフを中心とするグラフのクラスで探索することを行い、アルゴリズムの試作を行う。

g) 故障診断について

ハイパーキューブの Cayley グラフ表現についてはよくわかっている。特に、生成元については可能なものリストアップができており、その中から適応型故障診断に適したものを選び出し診断を遂行する方法を検討する。

平成 22 年度以降

a) Cayley グラフについて

ハイパーキューブについては、変形族のグラフの体系化を目標に研究する。他の Cayley グラフについては de Bruijn 族グラフの Cayley グラフ表現及び Cayley coset グラフ表現の可能性についてまとめたい。

b) 距離について

$L(2, 1)$ ラベリングについては、これまで無効グラフについての研究がなされてきたが、有向グラフの $L(2, 1)$ ラベリングについての研究を行う。

c) 一般化について

合同式を使った一般化を推し進め、de Bruijn 族のグラフを中心としたより広いグラフのクラスに拡大して研究する。この方法により一般化はグラフの研究方法の開発になるだけでなく、整数論の応用をも広げることとなる。

d) 埋め込みについて

キュー型埋め込みを 21 年度の試みにもとづ

いて実行する。
さらに、スタック型埋め込みとキュー型埋め込みの両方を使った埋め込みについて研究する。

e) 積について
グラフの積により得られるグラフの分解について継続して研究を行う。
群の積の Cayley グラフについては、de Bruijn グラフ、Kautz グラフの一般化と考えられるグラフについての研究を行う。

f) アルゴリズムについて
loop-rooted tree 及び 2 cycle-rooted tree を用いたマルチソースブロードキャストリングを他のグラフにおいても実行する。

g) 故障診断について
他の Cayley グラフについて生成元にもとづいた適応型故障診断を行う。

4. 研究成果

(1) 論文①Cayley graph representation and graph product representation of hypercubes.

ハイパーキューブが Cayley グラフであることは周知の事であり、その生成元としてある特殊なものが知られている。本研究では $(0, 1)$ ベクトルで表された n 次元ハイパーキューブの n 個の頂点ベクトルが生成元集合となるための必要十分条件が n 個のベクトルから構成される $n \times n$ 行列が正則であることであることを証明した。また、それを使って生成元集合の数を与える式を与えた。我々の研究室では以前に新たなグラフの積として関係積を導入し、既知であったデカルト積によるハイパーキューブの構成法とは異なる方法の存在を示した。本研究ではそれを更に発展させて多くの種類の関係積によるハイパーキューブの構成とその生成元について求めることができた。

(2) 論文②An algorithm for multisource broadcasting on Kautz digraphs using 2 cycle-rooted trees. 論文⑥ Multisource broadcasting on de Bruijn and Kautz digraphs using isomorphic factorization into cycle-rooted trees. 学会発表⑤、⑥

ネットワーク上の情報散布の問題は特定の一つのノードから全てのノードに情報を散布するブロードキャストリングと全てのノードが持っている全ての情報を全てのノードに散布するゴシップングが研究されている。我々はネットワーク上の複数のノードが持っている情報を全てのノードに散布する問題を提起し、de Bruijn および Kautz ダイグラフ上で研究した。基本的アイデアはグラフを同型因子分解し、それぞれの因子の

上で情報を独立に散布するというのである。使用する構造として、我々の研究室で提案した cycle-rooted tree という木とサイクルからなるグラフを採用した。de Bruijn ダイグラフと Kautz ダイグラフが cycle-rooted tree で同型因子分解できるための必要十分条件を求めた。条件にはサイクルの長さおよび木の高さが関係している。同型因子分解が与えられた上で散布する情報の個数およびアルゴリズムについて調べた。アルゴリズムの効率は十分に良いものである。

(3) 論文③Bipancyclic properties of Cayley graphs generated by transpositions

互換集合から生成される Cayley グラフの族として良く研究されているものが、bubble sort グラフと star グラフである。これら互換集合を表す構造は両極端な形をしており、これらの中に属するような Cayley グラフが多く存在する。本論文では、bubble sort グラフと star グラフの両方で研究結果の与えられている pancyclic 性について、その中間に属するような Cayley グラフに対しての考察を行った。互換集合から生成される Cayley グラフは、頂点数以下の任意の偶数長のサイクルをほぼ含むことが確認できた。また、それらのグラフの中で4サイクルを含まないものの特徴づけや、任意の辺を含むサイクルについても、特徴づけを与えた。

(4) 論文④The Cayley digraph associated to the Kautz digraph

de Bruijn ダイグラフとバタフライグラフは Associated graph として関連付けがされている。Associated graph として関連づけがされている2つのグラフクラスは、グラフ間の頂点や辺の対応付けが非常に整った形をしており、並列処理などの分野で効率的にシミュレートできることが知られている。de Bruijn ダイグラフと似た性質を持つ Kautz ダイグラフについて、その Associated graph については未発見であり、Open problem となっていた。これは Kautz ダイグラフを群の生成集合を表現するものとして扱ったときに、多くの表現方法があり、整った形で与えることが難しかったことによる。本論文では Kautz ダイグラフの頂点集合に対して新たな表現法を与え、その表現方法を基礎として、群の生成集合ならびに生成される群の具体的な形を示し、Associated graph である twofold butterfly グラフを定義した。この結果、open problem に対する一つの解答を与えた。

(5) 論文⑤ On the page number of cube-connected cycles

グラフのレイアウト問題の一つである本型埋め込み問題は、並列プロセッサの設計や並列処理の効率化などの分野で応用があり、多くのグラフクラスで研究が行われている。

しかし、本型埋め込み問題は一般のグラフに対してページ数の最小値を求めることが非常に難しく、グラフクラスそれぞれに対しての解法や最適解が求められている。本論文では、キューブ連結サイクルの本型埋め込みについて扱った。既存の結果ではハイパーキューブの本型埋め込みの結果から得られた結果を利用し、次元数に比例する形でのページ数が上界として与えられていたが、最適解であるという証明はされていなかった。本論文では、反射グレイコードを基本にした頂点の順序づけから、次元数に関係なく3ページで本型埋め込みができることを証明した。本結果はページ数に関して理論的に最適なものであり、この問題に最終的な決着をつけた。

(6) 論文⑦ A note on the k -degree Cayley graph

k -degree Cayley グラフとして提案されたグラフは、定義された論文の中では頂点集合と隣接関係が文字列の操作により与えられていたため、Cayley グラフの基礎となる群とその生成集合が明確に与えられていなかった。本論文ではこのグラフが Cayley グラフの族に含まれるかについて考察を行った。その結果、2つの巡回群の wreath 積群と、そのある部分生成集合で与えられる Cayley グラフが k -degree Cayley グラフと同型であることを示した。また、その Cayley グラフのクラスとして既存のグラフクラスである Trivalent Cayley グラフも含まれることを示した。この結果、これらのグラフの Cayley グラフとしての根拠をはっきりとさせた。

(7) 学会発表④ k 木における完全独立全域木について

T_1, T_2 をグラフ G の二つの全域木とする。 G の任意の2頂点 u, v に対して、 T_1 上の $u-v$ パスと T_2 上の $u-v$ パスが内素であるとき、 T_1 と T_2 は完全独立であるという。与えられたグラフに2個の完全独立全域木が構成可能であるかどうかを判定するアルゴリズムは NP 完全である事がすでに示されている。本論文では、対象とするグラフをコーダルグラフに限定しても、問題は NP 完全である事を示した。また、コーダルグラフの特殊な場合として k 木というグラフが広く研究されている。 k 木に構成可能な完全独立全域木の数のシャープな下界と上界を示した。また上界と下界にある任意の整数 p に対して、ちょうど p 個の完全独立全域木が構成可能な k 木の存在を示した。

(8) 学会発表② ラウンドダイグラフの双方向支配について

有向グラフ (ダイグラフ) の支配集合についての研究を行った。支配集合問題とは、ネットワーク上の各ノードが隣りあうノードからサービスを受けることができるように、ネットワーク上へ資源を配置することと対

応する。有向グラフの双方向支配集合という問題は、これまであまり研究されていない比較的新しい問題である。その中で、対象をラウンドダイグラフと呼ばれるグラフへ限定し、その最適な支配集合を求める効率的なアルゴリズムを設計し、その成果を発表することができた。その後、頂点が重みを持つラウンドダイグラフでの最小重み双方向支配集合を求めるアルゴリズムへ拡張した。この成果は論文としてまとめ、現在投稿中である。

(9) 学会発表①、③ Degree sequences related to degree set

次数集合についての研究を行った。グラフの次数とは、頂点に接続する辺の数であり、それらを並べた数列は次数列として定義される。グラフが与えられたとき、次数列はすぐに決定されるが、非負整数の数列が与えられたとき、その数列がグラフをもつかどうかは調べる必要がある。次数集合とは、非負整数の集合を与えたとき、集合の要素である数を次数とする頂点のグラフが存在するときをいう。すべての非負整数の集合は、次数集合であることは知られている。しかし、頂点数を最小に限定しても、複数のグラフが存在する。本研究では、頂点数を最小に限定したとき、すべての次数列を生成する方法を与えた。特に、集合の要素数が3以下のとき、すべての次数列を簡単に与えることができる。集合の要素数が4以上のときは、次数列となる候補の数の上界を与えた。現在、この成果を論文とするべく、準備中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① 茂呂田 美弥、畑山 亮一、柴田 幸夫、Cayley graph representation and graph product representation of hypercubes, IEICE Trans. Fundamentals., 査読有, Vol. E94-A. No. 3. 2011, pp. 946-954
- ② 津野 崇寛、柴田 幸夫, An algorithm for multi-source broadcasting on Kautz digraphs using 2-cycle rooted trees, IEICE Trans. Fundamentals., 査読有, Vol. E93-A. No. 10. 2011, pp. 1800-1805
- ③ 田中 勇樹、菊地 洋右、荒木 徹、柴田 幸夫、Bipancyclic properties of Cayley graphs generated by transpositions, Discrete Mathematics, 査読有, Vol. 310. No. 4. 2010, pp. 748-754
- ④ 田中 勇樹、柴田 幸夫、The Cayley digraph associated to the Kautz digraph, Ars Combinatoria, 査読有, Vol. 94. 2010, pp. 321-340
- ⑤ 田中 勇樹、柴田 幸夫、On the page

- number of cube-connected cycles、
Mathematics in Computer Science、査読有、Vol. 3.No.1.2010、pp.109-117
- ⑥ 津野 崇寛、柴田 幸夫、Multisource broadcasting on de Bruijn and Kautz digraphs using isomorphic factorization in to cycle rooted trees, IEICE Trans. Fundamentals., 査読有、Vol. E92-A.No. 8. 2009, pp.1757-1763
- ⑦ 田中 勇樹、柴田 幸夫、A note on the k degree Cayley graph, NETWORKS, 査読有、Vol. 54.No. 1. 2009、pp. 20-22

[学会発表] (計 7 件)

- ① 大澤 新吾、柴田 幸夫、Degree sequences related to degree set, 第24回 回路とシステムワークショップ、査読有、2011. 8. 2, 淡路夢舞台国際会議場 (兵庫県)
- ② 中島 環、荒木 徹、ラウンドダイグラフの双方向支配について、LAシンポジウム 2011 夏、2011. 7. 19, ザヴィラ浜名湖 (静岡県)
- ③ 大澤 新吾、柴田 幸夫、Degree sequences related to degree set, LAシンポジウム 冬、2011. 2. 3, 京都大学 (京都市)
- ④ 松下 正義、荒木 徹、k木における完全独立全域木について、情報処理学会アルゴリズム研究会、2010. 9. 22、函館高専 (函館市).
- ⑤ 津野 崇寛、柴田 幸夫、Factorization of generalized de Bruijn and Kautz digraphs by loop rooted trees, Japan Conference on Computational Geometry and Graphs, 2009. 11. 12, 金沢市文化ホール (金沢市)
- ⑥ 津野 崇寛、柴田 幸夫、An algorithm for multi-source broadcasting on Kautz digraphs using 2-cycle rooted trees, The 12th Japan-Korea Joint Workshop on Algorithms and Computation, 2009. 7. 4, Kookmin University (ソウル市、韓国)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

柴田 幸夫 (SHIBATA YUKIO)
群馬大学・名誉教授
研究者番号：80008531

(2) 研究分担者

荒木 徹 (ARAKI TORU)
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：40361042

大澤 新吾 (OSAWA SHINGO)
群馬大学・大学院工学研究科・助手
研究者番号：30241863

(3) 連携研究者

()

研究者番号：