

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月14日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21500004

研究課題名（和文）幅系グラフパラメータの研究

研究課題名（英文） A study of graph width parameters

研究代表者

山崎 浩一（YAMAZAKI KOICHI）

群馬大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：00246662

研究成果の概要（和文）：

本研究では、木幅、枝幅、バンド幅、パス幅などの幅系グラフパラメータに対し、双対性に着目することで、近似アルゴリズムを開発することを目的とする。研究成果として、バンド幅と類似の性質を持つ距離パス幅が AT-free グラフに対して定数近似アルゴリズムを持つことを示した。また双対性に着目することで、グラフのデカルト積に対する木幅の下界やパス幅の禁止グラフ構造をマトロイド上に拡張した。

研究成果の概要（英文）：

The purpose of this study is to design approximation algorithms for tree-width, branch-width, bandwidth, path-width, and so on by considering its duality. As the result of the study, we showed that the distance path width of AT-free graphs can be approximated within a constant factor in polynomial time. Moreover, by considering the duality, we gave lower bounds for tree-width for Cartesian products of graphs, and extended the notion of forbidden structure for path-width to matroids.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：グラフアルゴリズム

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：木幅、パス幅、パス距離幅、近似アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

木幅および枝幅が定数近似アルゴリズムを持つか否かは重要な未解決問題の一つである。研究開始当初時点で、木幅および枝幅の研究に関しては、以下の2つが知られていた：
1. オランダの H. Bodlaender 氏が率いる研究で、双対性を活かし木幅の下界を構成的に求めるアルゴリズムの開発。

2. S. Thomasse 氏が率いるフランスの研究グループの 2007 年の研究報告で、双対性を持つグラフパラメータを統一的に扱った研究。
一方バンド幅に関しては、(計算量理論のある仮定の下で)定数近似アルゴリズムを持たないことが示されており、さらに fixed parameter intractable であることが示されているなど、計算量的に見て困難な問題の代

表例として知られていた。しかしながらグラフクラスを AT-free に限定することで、定数近似を持つことも示されていた。

2. 研究の目的

効率の良いグラフアルゴリズムを設計する上で、グラフの特徴を表しているグラフパラメータの研究は重要である。中でも木幅、枝幅、バンド幅、パス幅などは特に重要で、効率の良いアルゴリズムの設計と深く関係している。これらのグラフパラメータを工学的な問題に応用する際に、パラメータ値を求める必要があるが、現実的な時間内で求めることは一般に困難 (NP 困難) であることが知られている。本研究では、これらパラメータ値の近似解または準最適解を現実的な時間内で求める近似アルゴリズム及び発見的アルゴリズムの開発を目的とする。

3. 研究の方法

木幅および枝幅に対する近似アルゴリズムに対し、perfect elimination ordering ベースや vertex separator ベースなどの従来手法とは異なる、双対性に強く着目した新手法を開発する。具体的には、木幅に関してはその双対構造の bramble、枝幅に対しては tangle に着目し、近似アルゴリズムの設計を行った。様々なグラフに対し、それらの (枝幅の双対構造である) tangle を計算機実験により生成し考察することで、双対性の理解を深めるという方法を当初は考えていた。与えられたグラフに対する tangle を生成することは理論上可能だが、グラフのサイズが大きくなると、tangle のサイズが爆発的に大きくなる。そのため、実際には小さいサイズのグラフしか解析できない。この問題を回避するため、今回は枝幅よりも若干シンプルな構造を持つ linear-carving-width と呼ぶ幅系パラメータに着目した。linear-carving-width の双対構造を、計算機を使って生成し、それらを解析するという手法をとった。

バンド幅の研究に関しては、直接バンド幅を対象にはせず、バンド幅と類似するパス距離幅という幅系パラメータに着目した。バンド幅は辺の削除に関して閉じているが、パス距離幅は閉じていないことが知られている。このような性質の有無が、アルゴリズム設計にどのような影響を与えるのかに注目しながら設計を行った。既知の研究結果として、AT-free グラフに対するバンド幅の近似アルゴリズムが知られていたため、今回はそれを参考に、AT-free グラフに対するパス距離幅の近似アルゴリズムを設計した。

4. 研究成果

(1) グラフのデカルト積に対する木幅の下

界：

近似アルゴリズムの設計において、精度の高い下界を得ることが鍵になる。本研究では、2つのグラフ A, B の Hadwiger 数と PI 数と呼ばれる 2 種類のグラフパラメータから、A と B のデカルト積の木幅の下界に対する計算式を与えた。本研究結果は、木幅の双対概念である bramble を実際に構築することで得られ、その意味において、研究目的にある“木幅と bramble 数の双対性に着目した研究”という方針に沿って得られた研究結果といえる。

(2) 木幅と最小フィルインを求める動的計画法の再考：

1990 年代後半に、Bouchitte と Todinca により提案された、極小セパレータのリストと潜在的極大クリークのリストを入力とする、木幅と最小フィルインを求める動的計画法が紹介された。本研究では、その動的計画法を再考し、木幅や最小フィルイン以外の (極小三角化で表現可能な) グラフパラメータにも適応可能なことを示した。

(3) AT-free グラフに対する距離パス幅の近似アルゴリズム：

AT-free グラフとは鎖型構造を持つグラフクラスである。AT-free グラフに対してバンド幅と呼ばれるグラフパラメータの定数近似アルゴリズムが既に知られていたが、本研究では、バンド幅 (およびパス幅) と深く関係する距離パス幅と呼ばれるグラフパラメータに関しても、AT-free グラフに対して定数近似アルゴリズムが存在することを示した。また AT-free の幾つかのサブクラスに対して、NP 完全性や定数近似可能性を示した。

「辺の削除に関して閉じているかいないかの性質」よりも、「AT-free が持つ鎖形構造とバンド幅やパス距離幅を持つ線形構造との適合」の方が、(グラフクラスを制限した場合は) アルゴリズムの設計に大きな影響を与えていることが理解できた点は大きな成果といえる。

(4) Linear-carving-width の双対性：

双対性に着目し、木幅や枝幅に対する近似アルゴリズムの開発を目標としてきた。この目標に向かって研究を進める中で、副産物的に、linear-carving-width と呼ぶ幅系パラメータの双対性を示すことが出来た。この双対性に着目し、linear-carving-width に対する新しい厳密・近似アルゴリズムの開発が期待できる。またこの双対性をより深く考察することは、本来目的としている。木幅や枝幅に対する新しいアルゴリズムの基本原理の理解に寄与すると考える。

(5) 全域木混雑度に対する発見的アルゴリズム

ムの研究：

Carving-width と呼ばれる幅系グラフパラメータと関係する全域木混雑度と呼ばれるグラフパラメータに対し、どのような発見的アルゴリズムが有効に働くかを実験的に調査した。遺伝的アルゴリズム、焼きなまし法、タブー探索、幅優先探索法、およびこれらを組合わせた方法で、ランダムグラフを中心に比較実験を行った。本実験結果として、焼きなまし法と幅優先探索法を組合わせたアルゴリズムが精度の良い解を出力するという結果を得た。

(6) マトロイド上でのパス幅の禁止構造：

23 年度の研究実施計画として、21, 22 年度で得られた研究結果を基にそれらの結果をマトロイド上へ拡張する研究を挙げていた。グラフやマトロイドにおける禁止構造の研究は重要で、いまだ不明な点が多い。グラフのパス幅に関する禁止構造については既に研究されていた。本研究では、外平面グラフの双対性に着目し、マトロイドでのパス幅の禁止構造を明らかにした。

(7) 単位円グラフの線形構造の研究：

22 年度に行った AT-free グラフなどの鎖形構造を持つグラフに対するパス距離幅の近似困難性の研究の副産物として、単位円グラフの鎖形構造を持つ部分クラスについて研究を行った。本研究により、鎖形構造を持つ(単位円グラフの)部分クラスの階層構造を明らかにした。近似アルゴリズムを設計する際、交差グラフ表現が分かっていると設計し易いという利点があるため、グラフクラスに対する交差グラフ表現の研究は重要である。本研究結果は、自然な交差グラフ表現を持つ部分クラスで AT-free グラフを階層分けしたことを意味する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

①A. Koutsonas, D. M. Thilikos, K. Yamazaki, Outerplanar Obstructions for Matroid Pathwidth, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 査読有, vol. 38, 2011, pp. 541-546

② Y. Otachi, T. Saitoh, K. Yamanaka, S. Kijima, Y. Okamoto, H. Ono, Y. Uno, K. Yamazaki, Approximability of the path-distance-width for AT-free graphs, 37th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2011), 査読有, 2011, vol. 6986,

pp. 271-282

③丸田 大樹, 大館 陽太, 山崎 浩一, 全域木混雑度に対するメタヒューリスティックアルゴリズムの評価, *電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会信学技報*, 査読無, vol. 110, no. 464, COMP2010-50, 2011, pp. 25-28

④片平 明, 桑原 勇人, 長澤 亮介, 大館 陽太, 山崎 浩一, カット幅の双対定理について, *数理解析研究所講究録*, 査読無, no. 1744, 2011, pp. 193-196

⑤ Y. Otachi, T. Saitoh, K. Yamanaka, S. Kijima, Y. Okamoto, H. Ono, Y. Uno, K. Yamazaki, Approximating the path-distance-width for k-cocomparability graphs, *数理解析研究所講究録*, 査読無, no. 1744, 2011, pp. 60-66.

⑥K. Kozawa, Y. Otachi, K. Yamazaki, The carving-width of generalized hypercubes, *Discrete Mathematics*, 査読有, vol. 310, 2010, pp. 2867-2876

⑦Y. Otachi, K. Yamazaki, Approximating the path-distance-width for asteroidal triple-free graphs, *数理解析研究所講究録*, 査読無, no. 1691, 2010, pp. 58-64

⑧K. Kozawa, Y. Otachi, K. Yamazaki, A lower bound for tree-width of Cartesian product graphs, 6th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Proc. of JH 2009, 査読有, 2009, pp. 280-288

⑨古瀬 雅信, 大館 陽太, 山崎 浩一, 木幅と最小フィルイン問題を求めるスキームの再考, *電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会信学技報*, 査読無, vol. 109, no. 235, COMP2009-34, 2009, pp. 17-24

[学会発表] (計 10 件)

①林 貴史, 木野 徹, 桑原 勇人, 長澤 亮介, 芝田 悠華, 山崎 浩一, 単位円交差グラフの線形構造を持つ部分クラスについて, 2011 年度 冬の LA シンポジウム, 2012. 1. 31, (京都大学)

② A. Koutsonas, D. M. Thilikos, K. Yamazaki, Outerplanar Obstructions for Matroid Pathwidth, *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb'11*, 2011. 9. 11, (Budapest, Hungary)

③ Y. Otachi, T. Saitoh, K. Yamanaka, S. Kijima, Y. Okamoto, H. Ono, Y. Uno, K. Yamazaki, Approximability of the path-distance-width for AT-free graphs, 37th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2011), 2011.6.21-24, (West Bohemia, Czech)

④丸田 大樹, 大館 陽太, 山崎 浩一, 全域木混雑度に対するメタヒューリスティックアルゴリズムの評価, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会, 2011.3.9, (中央大学)

⑤片平 明, 桑原 勇人, 長澤 亮介, 大館 陽太, 山崎 浩一, カット幅の双対定理について, 2010 年度 冬のLAシンポジウム, 2011.2.2, (京都大学)

⑥ Y. Otachi, T. Saitoh, K. Yamanaka, S. Kijima, Y. Okamoto, H. Ono, Y. Uno, K. Yamazaki, Approximating the path-distance-width for k-cocomparability graphs, 2010 年度 冬のLAシンポジウム, 2011.2.2, (京都大学)

⑦Y. Otachi, K. Yamazaki, Approximating the path-distance-width for asteroidal triple-free graphs, 2009 年度 冬のLAシンポジウム, 2010.2.2, (京都大学)

⑧ M. Furuse, Y. Otachi, K. Yamazaki: Reformulation of the scheme for computing tree-width and minimum fill-in, Proc. of 7th Japan Conference on Computational Geometry and Graphs, 2009.11.13, (Kanazawa, Japan)

⑨古瀬 雅信, 大館 陽太, 山崎 浩一, 木幅と最小フィルイン問題を求めるスキームの再考, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会, 2009.10.16, (東北大学)

⑩K. Kozawa, Y. Otachi, K. Yamazaki: A lower bound for tree-width of Cartesian product graphs, 6th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, 2009.5.16-19, (Budapest, Hungary)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 浩一 (YAMAZAKI KOICHI)

群馬大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号: 00246662

(2) 研究分担者

無し