様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 28 日現在

機関番号：32641
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009～2011
課題番号：21500022
研究課題名（和文）　結び目と空間グラフの計算位相幾何学

研究課題名（英文）　Computational topology on knots and spatial graphs

研究代表者
山本 慎（Yamamoto Makoto）
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：10158305

研究成果の概要（和文）：この研究において，理論的な研究と計算機実験とにより，主に次の 2 つの結果を得ることができた．まず，この研究の代表者と分担者が提案した絡み目の Jones 多項式を計算するアルゴリズムの実行時間は，ある種の絡み目に対しては，O(n^2) 時間であることを示した．さらに，結び目型は異なるが Jones 多項式が等しい pretzel 結び目の対が無限個存在することを証明した．

研究成果の概要（英文）：In this research we obtained the followings; We showed that our algorithm in 2007 computes Jones polynomials of some kinds of links in O(n^2) time, and that there are infinitely many pairs of alternating pretzel knots whose Jones polynomials are identical though whose knot types are different.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：総合領域
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：計算量理論

１．研究開始当初の背景

計算位相幾何学とは，位相幾何学における同値性の判定，分類，位相不変量の計算，などの問題が，計算の複雑さの理論からどのような計算クラスに入るのか，あるいは，それらが現実的に計算可能なクラスに含まれるために必要な条件は何なのか，現実的に計算可能なときにいかにして高速に計算するかを研究する，位相幾何学と計算理論とが融合した，非常に興味深い研究分野である．計算位相幾何学の研究は，英国と米国とさらに本研究の研究代表者と分担者による研究が最先端の研究であった．現在もそのような状態である．

絡み目の妥当なクラスに対して Jones 多項式を高速で計算するアルゴリズムの研究が盛んに行われている．

Jones 多項式による結び目・絡み目の分類の研究が行われ，絡み目については，Eliahou-Kauffman-Thistlethwaite により，自明な絡み目と同じ Jones 多項式をもつ非自明な絡み目が無限個存在することが示されている．結び目については，ほとんど知られていない．

２．研究の目的
本研究では，位相幾何学のテーマを結び目，絡み目，空間グラフに絞り，以下のような問題を計算位相幾何学的に解明することを目的とした．すなわち，

研究目的１．結び目，絡み目の重要な位相不変量の計算の研究

研究目的 2. 結び目，絡み目の分類問題の計算量の解析

研究目的 3. 空間グラフの絡み目理論的な分類とその計算量の解析

である．

３．研究の方法
本研究では，次のように研究を進める計画を立てた．

・絡み目の位相不変量を計算することは，たとえば，Jones 多項式の計算は #P-hard であるように，一般に現実的な時間で計算することができない場合が多い．したがって，高速なアルゴリズムを提案するために，どのような制限を絡み目に与えたらよいかを，計算機実験を含めて考察し，また，これまでに提案されているアルゴリズムを，様々な絡み目のクラスに制限して再評価する．

・位相不変量による絡み目の分類がどのような絡み目のクラスに対してどの程度できるのかを理論的に研究するために，いろいろな位相不変量に対して計算機実験を行う．そのために，高速に計算できるアルゴリズムを開発する．

４．研究成果
絡み目や結び目の分類，特徴づけのためにいろいろな位相不変量が定義され研究されている．

J. W. Alexander は，多項式時間で計算可能な Alexander 多項式を定義した (1928). 自明な結び目と同じ Alexander 多項式が無限個存在することが知られている．

Jones 多項式は，絡み目の分類において非常に有用であると期待され，さまざまな研究が行われている．

L. H. Kauffman は，Kauffman bracket 多項式を用いた組み合わせ的な計算方法を提案した (1987)．彼の方法を用いると，Jones 多項式は O(n)次の多項式の O(2^O(n))回の演算で計算される．ここで，n は計算しようとする絡み目の Tait グラフの辺の数である．

F. Jaeger, D. L. Vertigan そして D. J. A. Welsh により，一般に，Jones 多項式の計算は #P-hard であることが示されていて (1990, 1993)，最悪の場合は指数時間必要であることが予想されている．

このことから，絡み目に何らかの条件を与えて，その条件を満たす絡み目のクラスの Jones 多項式を計算する研究が行われるようになった．

J. A. Makowsky は，入力として与えられる絡み目の Taite グラフの木幅が定数で制限されている場合は，Jones 多項式は多項式時間で計算可能であることを示した (2001, 2005).

J. Mighton は，木幅が高々2 である場合は，Jones 多項式は O(n) 次の多項式の O(n^4) 回の多項式の演算で計算可能であることを示した (2001).

T. Utsumi, K. Imai は prtzel 絡み目の Jones 多項式は O(n^2) 時間で計算可能であることを示した (2002).

本研究を組織している M. Hara, S. Tani, M. Yamamoto（原 正雄，谷 聖一，山本 慎）は，aroborescent 絡み目の Jones 多項式は O(n) 次の多項式の O(n^3) 回の多項式の演算で計算可能であることを示した (2002).

さらに，M. Hara, M. Murakami, S. Tani, M. Yamamoto は，2-bridge 絡み目，3-braid 絡み目，Montesinos 絡み目の Jones 多項式は O(n) 次の多項式の O(n) 回の多項式の演算で計算可能であることを示した (2007, 2009).

そして，Y. Diao, C. Ernst, U. Ziegler は，nested closed tangle diagram の tangle depth が高々整数である場合は Jones 多項式は多項式時間で計算できることを示した (2009)．特に，pretzel 絡み目，2-bridge 絡み目 Montesinos 絡み目，Conway algebraic 絡み目の Jones 多項式は O(n^2) 時間で計算可能であることを示した．

本研究では，これらの研究を踏まえて，計算機実験などを行った．

そして，M. Hara, S. Tani, M. Yamamoto によるアルゴリズム (2007) と M. Hara, M. Murakami, S. Tani, M. Yamamoto によるアルゴリズム (2009) の実行時間を解析し直すことで，次の定理を証明した．

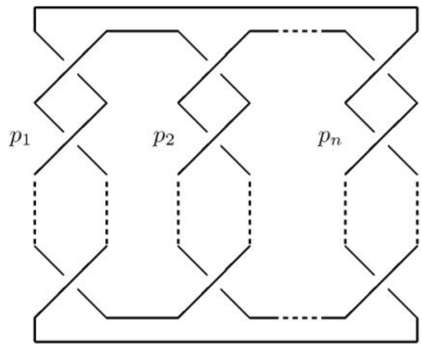
定理 ：2-bridge 絡み目，closed 3-braid 絡み目，Montesinos 絡み目の Jones 多項式は高々 O(n^2) 時間で計算可能である．そしてそのアルゴリズムは，M. Hara, S. Tani, M. Yamamoto によるアルゴリズム (2007) と M. Hara, M. Murakami, S. Tani, M. Yamamoto によるアルゴリズム (2009)で与えられる．

次に，絡み目の Jones 多項式を交点数が少ないものから順に計算することを試みた．これは，最初にも書いたように Jones 多項式は結び目や絡み目の分類に非常に有用な位相不変量であると期待されているからである．ただし，絡み目に対しては，Eliahou, Kauffman, Thisleswaite により，自明な絡み目と等しい Jones 多項式をもつ非自明な絡

み目が無限個存在することが示されている(2003).

山本 慎はその研究室の大学院生，浅見和貴，瀬沼 勇介，森 晶城の3君と，交点数が100までのalternating pretzel 結び目のJones 多項式を計算した（実際には，Kauffman bracket 多項式を計算した）．ちなみに，このような結び目は 28,289,375 個存在する．上記 T. Utsumi, K. Imai (2002)の結果から，交点数 n の pretzel 絡み目の Jones 多項式は O(n^2) 時間で計算できる．これらの Jones 多項式の中に等しいものがあるかを探すと，n 次多項式の比較に O(n) 時間かけるとすると，Jones 多項式の計算と比較とに，1秒間に 10^10 ステップの計算ができる計算機では，計算に約 30 秒，比較に 5 日かかる（比較はもっと速くできるが）．

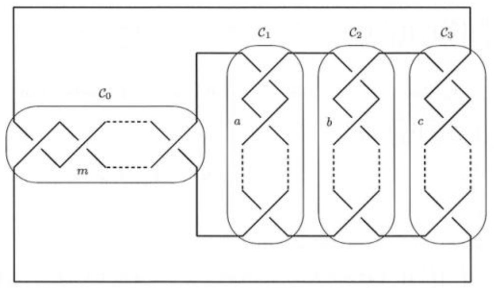
図はpretzel 絡み目の例である．このような pretzel 絡み目を P(p_1, p_2,…,p_n)で表す．ここで，p_1, p_2,…,p_n は 0 でない整数であり，すべて同符号のとき，alternating pretzel 絡み目となる．



この計算結果から，Jones 多項式の等しい型の異なるpretzel 結び目の存在の可能性を突き止め，M. Hara と M. Yamamoto は，理論的に考察し，次の定理を証明した．

定理 ： k を自然数とする．
K を P(1,…,1,k+3,k+4,k+5)（ここで，1,…,1 は k 個の 1 が並んでいるものとする），K’を P(1,…,1,k+1,k+2,k+3)（ここで，1 は k+6 個の 1 が並んでいるものとする）なる pretzel 結び目とすると，K と K’は，Alexander 多項式は異なるが，等しい Jones 多項式をもつ．

次の図で，m = k, a = k+3, b = k+4, c = k+5 としたものが K, m = k+6, a = k+1, b = k+2, c = k+3 としたものが K’ である．Alexander 多項式が異なるので, K と K’の結び目型は異なる．



Jones 多項式を，結び目の diagram から計算する方法を考えると，互いに mutation という操作で Jones 多項式は不変であることを見るのは難しくない．したがって，互いに mutation で移り合える異なる型の結び目は等しい Jones 多項式をもつことは知られていたが，それ以外のタイプで，等しい Jones 多項式をもつものの存在が示されたのはこれが初めてである．

〔雑誌論文〕（計　2 件）

① Masahiko Murakami, Masao Hara, Seiichi Tani, Makoto Yamamoto
O(n^2) time algorithms for computing Jones polynomials of certain links. 研究集会「結び目の数学Ⅱ」報告集（査読無し), 2010 年 1 月.

② Masao. Hara, Makoto Yamamoto
On Jones polynomials of alternating pretzel knot (preprint)

〔学会発表〕（計 2 件）

① 原 正雄, 山本 慎
On Jones polynomials of alternating pretzel knots. 研究集会「結び目理論の展望」2012 年 3 月 18 日，早稲田大学.

② 村上 雅彦, 原 正雄, 谷 聖一, 山本 慎
O(n^2) time algorithms for computing Jones polynomials of certain links. 研究集会「結び目の数学Ⅱ」, 2009 年 12 月 23 日，早稲田大学

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

○取得状況（計　0 件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

山本 慎　(YAMAMOTO MAKOTO)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：10158305

(2)研究分担者

原 正雄 (HARA MASAO)
東海大学・理学部・准教授
研究者番号：10238165

(3)連携研究者

谷 聖一 (TANI SEIICHI)
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：70266708