様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年５月３０日現在

機関番号：３２６４４
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2009～2011
課題番号：２１５０００２６
研究課題名（和文）　誤差を含む代数問題に対する信頼性の高い数値数式融合計算の研究

研究課題名（英文）　On the Study of Highly Reliable Symbolic-Numeric Computation for Algebraic Problems with Empirical Data

研究代表者
関川　浩（SEKIGAWA　HIROSHI）
東海大学・理学部・准教授
研究者番号：00396178

研究成果の概要（和文）：データが誤差を含むいくつかの代数問題について，数値数式融合計算を用いた信頼性の高い計算方式を提案した．主な成果は以下である．(1) 多項式の整除性判定アルゴリズム．(2) 安定化理論の新しい利用法．(3) 連立代数方程式について解の種々の性質を保つような係数の摂動限界の計算アルゴリズム．そのほか，与えられた一変数実係数多項式に一番近く，与えられた複素領域に零点を持つ一変数実係数多項式を求める計算時間を評価した．

研究成果の概要（英文）：We proposed highly reliable symbolic-numeric computation methods for algebraic problems with empirical data. Some main results are as follows. (1) An algorithm to determine divisibility of polynomials. (2) A new application of stabilization techniques. (3) An algorithm to compute the maximal perturbations for preserving properties of solutions of a polynomial system. Furthermore, we analyzed computing time to find a real univariate polynomial that has a zero in a given complex domain and is nearest to a given real univariate polynomial.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：総合領域
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：多項式，代数方程式，誤差，数値数式融合計算，安定化理論

１．研究開始当初の背景

現在，科学技術計算には主に数値計算を用いる．これは近似計算を用いるため処理が軽いからである．数式処理は正確な計算を用いるため信頼性は高いが，メモリや計算時間を大量に必要とする点から敬遠されてきた．しかし，最近の計算機の能力を考えると，数式処理も実用段階に入ってきたといえる．

応用に現れる現実の代数問題は誤差を含むことが普通であり，誤差への対処が必須である．しかし，従来，数式処理では主に誤差を含まない代数問題を扱ってきた．誤差を含む代数問題にはどのような困難があるか，以下，二つの実係数一変数多項式 $f=x^2-a$ と $g=x$

-2 の最大公約多項式 $\gcd(f,g)$ を求める例を用いて説明する．a が正確に4と等しいとき，$\gcd(f,g)=g$ である．今，a の測定値に高々 $\varepsilon>0$ の誤差が入っており，真の値は $|a-4|\leqq\varepsilon$ を満たすものと仮定する．このとき，二つの多項式 x^2-4 と x^2-a は誤差範囲内では区別できないから，f は単一の多項式ではなく，多項式の集合 $F=\{x^2-a \mid |a-4|\leqq\varepsilon\}$ と考えるのが自然である．すると，誤差の限界 ε がどれほど小さくても，それが正である限り，$f_1=x^2-4$，$f_2=x^2-4-\varepsilon\in F$ に対し，$\gcd(f_1, x-2)=x-2$ であり，$\gcd(f_2, x-2)=1$ である（不連続性）．このように，係数に誤差を含む多項式に対する最大公約多項式は定義できない場合があるから取り扱わない，というのが以前の数式処理の立場であった．

しかし，こういった誤差のある状況においても，応用上，何らかの意味のある結果を求める必要が出てくる．そこで，最近の数式処理では，係数に誤差を含む二つの多項式 p，q に対し，誤差範囲内で p，q と区別できない多項式 p'，q' の集合 P, Q を考え（通常，p'，q' の次数は p, q の次数と等しいものとする），p，q の最大公約多項式を求める問題の解釈を変え，たとえば，「$\gcd(p', q')$ $(p'\in P, q'\in Q)$」の次数の最大値，および，それを実現する p'，q' を求める」といった問題を設定するようになった．

誤差のため定義できない問題をどのように解釈すべきかは，計算を数値計算で行うか，数式処理で行うかによらず考慮する必要がある．数値計算においては，とくに線形代数において，誤差のある問題の取扱いは以前より十分に研究されており，数値線形代数という分野が確立している．

２．研究の目的

連立一次方程式や行列の固有値計算などの線形代数に関わる問題は，科学技術計算において重要な部分を占めている．本研究の目的は，線形代数にとどまらず，多項式や代数方程式に関わる問題を含め広く代数問題を取り上げ，その問題が誤差を含む場合（多項式や代数方程式の係数，行列の成分が誤差を含む場合）に，数値数式融合計算を用いた，信頼性が高く効率的な計算方式を確立することにある．

３．研究の方法

数式処理において基本的かつ重要な対象であるグレブナ基底を計算する問題について，多項式の係数に誤差がある場合に問題の解釈を変え，新しく設定した問題を解くことを最終目標とした．基本方針は，まず，グレブナ基底に対する研究の準備となる代数問題を選び，研究を進めた後，最終目標であるグレブナ基底に対する研究を行う，というものである．各代数問題に対しては，研究目的に記述した以下の三つの課題に分けて研究を進めた．

【課題１】係数や成分が誤差を含む場合における代数問題の適切な解釈，新しい問題の設定．

【課題２】課題１で設定した問題を解くアルゴリズムの構築．

【課題３】課題２で構築したアルゴリズムの，数値数式融合を利用した効率化．

研究を進めるにあたっては，誤差のある問題の取り扱いが十分に研究されている数値計算，とくに数値線形代数の知見を参考とした．

４．研究成果

(1) （課題１，２）基本的な問題である多項式の整除性判定について，係数に誤差のある場合に新しい手法を提案した．係数に誤差のある実係数多項式 p，f を，係数の誤差範囲を区間で表した実区間多項式 P，F で表すこととし，P に属する多項式 q，F に属する多項式 g が存在して q が g で割り切れることをもって p が f で割り切れる，と解釈し，区間解析を基にした反復アルゴリズムを用いる整除性判定手法を提案した．

(2) （課題２）重要な問題である近似因数分解に利用可能な，与えられた因子を持つ多項式列の性質を解明した．多項式 f の Euclid ノルムを $||f||$ で表し，多項式 f，g 間の距離を $||f-g||$ で定義する．p と f_0 を与えられた実係数多項式，ただし，$||f_0||=1$ とする．$p_1=f_0\cdot g_1$ を，f_0 を因子とする p に一番近い多項式，$p_2=c_1\cdot f_1\cdot g_1$ を，g_1 を因子とする p に一番近い多項式，ただし，$||f_1||=1$ かつ $c_1>0$，$p_3=f_1\cdot g_2$ を，f_1 を因子とする p に一番近い多項式，…としたとき，多項式列 $\{p_j\}$，$\{f_j\}$，$\{g_j\}$，数列 $\{c_j\}$ の性質を解明した．この性質は，p に近く因数分解可能な多項式を求める問題，すなわち，近似因数分解を求める問題に利用可能である．さらに，実数係数の場合の結果を複素数係数の場合に拡張した（投稿中）．

(3) （課題３）本研究における主要な計算手段である安定化理論について，新しい利用法を提案した．区間係数に，計算履歴を記録するシンボルを追加した Interval with Symbol (IS)を係数としたデータに対し安定化理論を適用，ゼロ書換えの正しさを IS によって確かめながらアルゴリズムを実行し，最後に IS のシンボルを用いて正確な出力を得る手

法（ISCZ 法）を提案し，グレブナ基底計算について実験を行った．さらに，どのような問題に対し ISCZ 法が有効となるか確かめるため，いくつかの指標を提案し，実験を行った．さらに，ISCZ 法を凸包構成アルゴリズムに適用した実験を行い，有効性を確認した．

(4) （課題１，２）二変数で式が二本の連立代数方程式 $f(x, y)=g(x, y)=0$ に解があると仮定する．f, g の係数をどれ程動かすと解が存在しなくなるか，その限界を，f と g の終結式を用いて評価する手法を提案した．

(5) （課題１，２）$f_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を実数係数の n 変数多項式とする．連立代数方程式 $f_1=\cdots=f_n=0$ に単純な孤立実数解が存在する場合に，f_i の係数をどれ程動かすと単純な孤立実数解が存在しなくなるか，その限界を評価する手法を提案した．具体的には，$f_1=\cdots=f_n=0$ の単純な孤立実数解のうち，注目しているものを $x(0)$ とするとき，$x(0)$ を初期値とする Newton 法が単純な孤立実数解に収束するような係数の摂動限界を Kantorovich の定理を利用して評価する．孤立解の存在する連立一次方程式を，行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書くとき，孤立解が存在するような係数の摂動限界は行列 A のノルムと条件数を用いて表現できるという，数値線形代数における既知の結果がある．本成果は，この結果の拡張にあたるといえる．

(6) （課題１，２）n 変数複素係数多項式 $f_1, \cdots, f_n$ が与えられているとする．このとき，連立代数方程式 $f_1=\cdots=f_n=0$ について，$f_1, \cdots, f_n$ の係数をどれ程動かすと，どの変数の値もゼロではない解の個数が変化するか，その限界を，BKK（Bernshtein，Kushnirenko，Khovanskii）限界の等式が成り立つ条件を用いて計算する方法を提案した．また，この結果を得る過程で，係数に誤差がある場合のグレブナ基底について以下の成果を得た．グレブナ基底が $\{1\}$ である n 変数複素係数多項式 $f_1, \cdots, f_n$ に対し，適当なノルムで測ったとき $(f_1, \cdots, f_n)$ に一番近い n 変数複素係数多項式の組 $(g_1, \cdots, g_n)$ であって，そのグレブナ基底が $\{1\}$ ではないものを求める問題の解が利用できることを示した．これは，一種の近似グレブナ基底を求める問題と見ることができる．

(7) （課題２）一変数実係数多項式 f と複素領域 D（f は D に零点を持たない）に対し，無限大ノルムで測って f に一番近く D に零点を持つ一変数実係数多項式 g を求める問題につき，g は多項式時間で計算可能，という以下の論文の結果を詳細化し，計算時間のオーダーを具体的に評価した．

H. Sekigawa, The Nearest Polynomial with a Zero in a Given Domain from a Geometrical Viewpoint, Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2008, pp. 287-294, 2008.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① H. Sekigawa, Computing the Nearest Polynomial with a Zero in a Given Domain by using Piecewise Rational Functions, Journal of Symbolic Computation, 査読有, Vol. 46, Issue 12, pp. 1318-1335, 2011.

② H. Sekigawa and K. Shirayanagi, Isolated Real Zero of a Real Polynomial System under Perturbation, ACM Communications in Computer Algebra, 査読有, Vol. 45, No. 2, pp. 131-132, 2011.

③ H. Sekigawa and K. Shirayanagi, Solvability of Bivariate Polynomial Systems under Perturbation, ACM Communications in Computer Algebra, 査読有,Vol. 44, No. 3, pp. 147-148, 2010.

④ H. Sekigawa, A Sequence of Nearest Polynomials with Given Factors, Math-for-Industry Lecture Note, 査読有, Vol. 22, pp. 187-190, 2009.

⑤ K. Shirayanagi and H. Sekigawa, Reducing Exact Computations to Obtain Exact Results Based on Stabilization Techniques, Proceedings of International Workshop on Symbolic-Numeric Computation 2009, 査読有, pp. 191-197, 2009.

⑥ K. Shirayanagi and H. Sekigawa, A New Method of Reducing Exact Computations to Obtain Exact Results, ACM Communications in Computer Algebra, 査読有, Vol. 43, No. 3, pp. 102-104, 2009.

⑦ H. Nakayama and H. Sekigawa, Deciding Divisibility between Polynomials with Inexact Coefficients, ACM Communications in Computer Algebra, 査読有, Vol. 43, No. 3, pp. 91-94, 2009.

〔学会発表〕（計１１件）

①関川浩，白柳潔，連立代数方程式の解の個数を保つ摂動限界，Risa/Asir Conference 2012，2012年3月20日， 神戸大学 (神戸市).

②H. Sekigawa and K. Shirayanagi, Isolated Real Zero of a Real Polynomial System under Perturbation, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2011, 2011年6月9, 10日，サンノゼコンベンションセンター (米国).

③関川浩，白柳潔，係数に誤差のある実係数連立代数方程式の孤立実数解について，Risa/Asir Conference 2011, 2011年3月21日，神戸大学 (神戸市).

④白柳潔，関川浩，安定化理論に基づくISCZ法の凸包構成への応用，京都大学数理解析研究所研究集会 Computer Algebra — Design of Algorithms, Implementations and Applications, 2010年12月3日，京都大学 (京都市).

⑤ H. Sekigawa and K. Shirayanagi, Solvability of Bivariate Polynomial Systems under Perturbation, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2010, 2010年7月26, 27日，ミュンヘン工科大学 (ドイツ).

⑥関川浩，白柳潔，係数に誤差のある連立代数方程式の可解性について，第19回日本数式処理学会大会，2010年6月13日，名古屋大学 (名古屋市).

⑦ H. Sekigawa, A Sequence of Nearest Polynomials with Given Factors, The 9th Asian Symposium on Computer Mathematics and the 3rd International Conference on Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences, 2009年12月14日，JALリゾート シーホークホテル福岡 (福岡市).

⑧白柳潔，関川浩，安定化理論に基づくISCZ法の有効性について，京都大学数理解析研究所研究集会 Computer Algebra—Design of Algorithms, Implementations and Applications, 2009年11月4日，京都大学 (京都市).

⑨K. Shirayanagi and H. Sekigawa, Reducing Exact Computations to Obtain Exact Results Based on Stabilization Techniques, The 3rd International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 2009年8月3日，コープイン京都 (京都市).

⑩K. Shirayanagi and H. Sekigawa, A New Method of Reducing Exact Computations to Obtain Exact Results, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2009, 2009年7月30日，Korea Institute for Advanced Study (韓国).

⑪H. Nakayama and H. Sekigawa, Deciding Divisibility between Polynomials with Inexact Coefficients, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2009, 2009年7月30日，Korea Institute for Advanced Study (韓国).

〔産業財産権〕
○出願状況 (計２件)

①名称：連立代数方程式の係数に対する許容誤差限界評価装置、方法、プログラム
発明者：関川浩
権利者：日本電信電話株式会社
種類：特許
番号：特願 2010-059763
出願年月日：2010 年 3 月 16 日
国内外の別：国内

②名称：最近多項式算出装置、方法及びプログラム
発明者：関川浩
権利者：日本電信電話株式会社
種類：特許
番号：特願 2009-277454
出願年月日：2009 年 12 月 7 日
国内外の別：国内

６．研究組織
(1)研究代表者
関川　浩 (SEKIGAWA HIROSHI)
東海大学・理学部・准教授
研究者番号：00396178

(2)研究分担者
白柳　潔 (SHIRAYANAGI KIOSHI)
東邦大学・理学部・教授
研究者番号：80396176