

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月13日現在

機関番号：32630

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21500282

研究課題名（和文） リスク計測のための数理モデルの研究

研究課題名（英文） A Study of Mathematical Models for Risk Measurement

研究代表者

塚原 英敦（TSUKAHARA HIDEATSU）

成城大学・経済学部・教授

研究者番号：10282550

研究成果の概要（和文）：リスク計測のために望ましい性質を持つリスク尺度として、歪みリスク尺度のクラスを取り上げた。その推定問題として、データが弱従属な定常時系列の実現値である場合に、自然な推定量がある正則条件の下で強一致性と漸近正規性をもつことが示され、漸近分散の推定とバイアス補正の方法を提案し、モンテカルロ・シミュレーションによっていくつかの歪み尺度推定を比較・検討した。さらに、歪みリスク尺度を用いたバックテスト法とリスク資本配分法を提案し、様々なシナリオの下でいくつかの歪み尺度の比較分析を行った。

研究成果の概要（英文）：We take the class of distortion risk measures as the object of our study because it satisfies many desirable properties as a measure of financial risk. We first consider estimation problem; when data can be considered as realizations of weakly dependent stationary time series, we show that our estimator, which is of the L-statistics form, has strong consistency and asymptotic normality. We also propose an estimator for the asymptotic variance using spectral analysis, and investigate a bootstrap procedure for bias correction including its validity. Using Monte Carlo simulation, we examine the performance of the estimator, comparing with some distortion risk measures and the value-at-risk (VaR). Furthermore, we propose some backtesting methods with distortion risk measures and compute risk allocation contributions. We then perform a comparative analysis of distortion risk measures under various distributional scenarios.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：金融工学

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：定量的リスク管理, 計量ファイナンス

1. 研究開始当初の背景

市場リスク尺度としてよく知られている

バリュエーション・アット・リスク（VaR）は瞬く間に業界標準となり、国際的な銀行監督に関する

るパーゼル合意においてもその利用が必須となっている。しかし、VaRには理論的観点から様々な問題があることが明らかになってきていた。

リスク尺度は、所与のポジションが、外部あるいは内部のリスク管理者にとって許容可能となるために、そのポジションに上乗せされるべき資本量と定義される。VaRに代わる整合的リスク尺度としては、期待ショートフォールが最も有名であるが、この期待ショートフォールを含む、整合的リスク尺度のクラスとして歪みリスク尺度が注目され始めているが、筆者はこのクラスに属する1パラメータ族をいくつか提案・検討してきた。

2. 研究の目的

(1) 数値的な側面として、様々な分布の下でのリスク尺度の数値的振舞いを調べることが必要である。理論的にはリスク尺度は有界な確率変数に対して定義されるが、実際に損失分布として考えられるもののほとんどは非有界な台をもつものであり、したがって理論的に導かれたリスク尺度が実際に十分な精度をもって計算可能であるかどうかを検証する必要があり、また、これはストレステストなどのシミュレーションを行う際にも重要である。

(2) リスク尺度の統計的推定方法。データが従属性をもつ時系列データである場合にも、定常性やエルゴード性が仮定されれば同じL統計量が推定量として妥当である。これについて、厳密な漸近理論を細部を詰めて証明するとともに、シミュレーションによる数値実験および実際のデータを用いた実証分析を行う必要がある。また、得られた漸近分散やシミュレーション結果などの情報を用いて、いくつかのリスク尺度を比較する。

3. 研究の方法

理論的、数値（シミュレーション）的、そして実証的という3つの方向からアプローチする。理論面での展開は紙上での計算、命題の証明であり、それを計画どおりに進めることができるかどうかは率直に言ってやってみなければわからない。ただし、現在一部がわかっている結果の拡張等についてはある程度見込みは立っており、さらに、共同研究を通じて理論的展開を試みたい。シミュレーションについては、研究費により必要なソフト（統計分析ソフト R や数値解析ソフト MATLAB）を完備することにより、大規模な計算計画が展開できる。実証分析についても、

必要なファイナンス・データを購入手、我々の方法を適用してみることにより、実務上も適用可能な方法を展開することが可能となる。

4. 研究成果

(1) Artzner et al.によるリスク尺度の整合性、さらには楠岡による法則不変性や共単調加法性などを条件として課し、さらに期待ショートフォールとの比較可能性の条件を加えて、歪みリスク尺度の1パラメータ族を導き、その一般形の表現を得た。そして、確率順序に関連してその性質を調べ、さらに独立同一分布データが得られたときの推定方法についてその推定量を定め、MATLABを用いて実際に計算を行った。さらに、正規分布とt分布の場合について、VaRや期待ショートフォールとの数値的な比較を行った。

(2) 歪みリスク尺度を推定する際に自然に考えられる推定量は、統計学においてL統計量と呼ばれる形をしている。ファイナンスにおける時系列データについては独立性の仮定が現実的ではないため、非独立データに対する推定量の挙動を調べる必要がある。そこで、定常かつ強ミキシング性をもつ確率変数列に対する一般のL統計量の漸近理論を厳密・詳細に分析した。その結果、強一致性或漸近正規性が成り立つためのかなり一般的な条件を見つけることができた。それらはこれまでの研究で得られているものを若干改善した結果である。さらに、ファイナンス・データに良く適合するとされるGARCH(1,1)モデルや逆ガンマAR(1)をボラティリティ過程として用いた確率ボラティリティ・モデルを用いたシミュレーションをいくつか条件を変えて行い、この場合には理論的に得られた漸近正規性がある程度の標本数で実現されていることが示された。これらの結果に関連して、同様の極限定理を法則不変なリスク尺度に対して拡張できることを示した。

(3) データが強ミキシング性を満たす弱従属性をもつ時系列データの場合について、時系列解析におけるスペクトル理論を利用して、L統計量の漸近分散に対する推定量を考案し、弱一致性などその性質を調べた。さらに、移動ブロック・ブートストラップ法を用いた漸近分散の推定量およびバイアス補正法を考え、その漸近的一致性を示すとともに、逆ガンマAR(1)過程をボラティリティ過程とする確率ボラティリティ・モデルを用いたシミュレーションで、様々なパラメータ値の組合せの下で、それら推定量の実際上の有効性を確かめた。特にバイアスについては、

ブートストラップ法によって、かなりの改善がみられることがわかった。また、同シミュレーションにより、いくつかの歪み尺度に対して、我々の提案する推定量や伝統的な推定量の振舞いを比較・検討した。

(4) 近年実証分析でも注目されている確率ボラティリティ・モデルの特殊形について、その幾何的エルゴード性を示した。この性質は多くの理論的結果の仮定となっているが、同時に観測値間の依存関係がかなりの速さで弱くなっていくことも示している。このモデルでは、ボラティリティ過程は1次元周辺分布が逆ガンマ分布となる自己回帰過程であり、そのため収益率過程の1次元周辺分布がt分布となる。その結果、リスク尺度の真の値が計算できるモデルとなっており、リスク尺度推定量のパフォーマンス、つまりバイアスの有無やその大きさ・符号、そして平均2条誤差をシミュレーションで調べる際に有用である。また、このモデルはいくつかの現実のデータに対してもある程度当てはまりが良いことが実証分析でわかった。

(5) シミュレーションおよび理論的アプローチにより、リスク管理におけるリスク資本の配分やポートフォリオ・パフォーマンス評価において歪みリスク尺度の1パラメータ族の比較分析を行った。歪みリスク尺度を用いた資本配分の話題について、オイラー配分原理のMATLABコードを開発し、様々な歪みリスク尺度を用いてシミュレーションによる数値的比較を行った。ガウス接合関数は固定し、周辺分布がt分布、一般化パレート分布の場合を考えたが、はっきりとした説明のつく結果は部分的にしか得られなかった。ただし、比例オッズ・期待ショートフォールによる配分と比例ハザード・ガウス尺度による配分の間には明らかな相違がみられた。それは分散化指数による比較についても同様であった。資本配分については、想定分布にかかわらずに期待ショートフォールや比例オッズ歪みリスク尺度による配分はかなり類似していることがわかった。一方、比例ハザード・ガウス歪みリスク尺度による配分については数値的精度に多少問題があることがわかった。すなわち、可積分条件をぎりぎり満たすような関数の数値積分を精度良く行う必要がある。この困難はなかなか手ごわく、数値解析の専門的知識を要するため、まだ完全に解決はしていない。

(6) バックテストとは、リスク計測に対するモデル及び推定手法の精度を評価する方法であり、統計的にはある種の帰無仮説を検定することに帰着する。VaRの場合に用いられるのはVaR超過の個数に基づくアプローチ

であり、これを歪みリスク尺度に対して拡張することは可能であることを示した。これは単純な拡張であり、i.i.d.標本に対しては理論的にも正当性をもつ。しかし、標本の時系列的従属性をモデルに入れる場合、統計理論の厳密性からは、それに関する仮定が曖昧であると言わざるを得ない。i.i.d.標本があればノンパラメトリックな意味でも可能であるが、その他の場合には時系列モデルとしてより明示的なものを設定する必要があることを指摘した。現在はその具体的な方法を模索中である。また、主にGARCH型のモデルを前提として、条件付き分布に基づくリスク尺度の推定を論じたMcNeil and Frey (2000)による方法の拡張も形式的には容易であり、まずシミュレーションによりそのパフォーマンスを確かめた。

(7) 接合関数は複数のリスク間の依存関係をモデル化するために有用な道具である。アルキメデス型接合関数は、その数学的簡明性から応用上頻繁に用いられる接合関数族であるが、その数学的な構造に関する命題の証明や、その統計的応用可能性について、様々な問題点や解決に向けてのアプローチの方法を提案した。接合関数を用いてクロスセクションの従属性を定め、時系列的従属性はARCHや確率ボラティリティ・モデルなどを使って独立にモデル化するというアプローチには、そのような確率分布が存在しうるかという問題があることを指摘し、実際に、そのようなアプローチが不可能となる例を挙げた。適合度検定や独立性検定に必要な棄却値やp値を得るために渋谷政昭先生が提案された新たなリサンプリング法の正当性と漸近分布は現在吟味中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Hideatsu Tsukahara, Erratum to “Semiparametric estimation in copula models”, *Canadian Journal of Statistics*, 査読有, vol.39, No.4, 2011, 734–735, DOI: 10.1002/cjs.1012
- ② Hideatsu Tsukahara, Comments on: Inference in multivariate Archimedean copula models, *TEST*, 査読有, vol.20, 2011, 287–289, DOI: 10.1007/s11749-011-0257-z
- ③ Hideatsu Tsukahara, One-parameter families of distortion risk measures,

Mathematical Finance, 査読有, vol.19,
2009, 691–705,

DOI: 0.1111/j.1467-9965.2009.00385.x.

- ④ Hideatsu Tsukahara, Some properties of distortion risk measures, Advances in Mathematical Economics, 査読有, vol.12, 2009, 153–166,
DOI: 10.1007/978-4-431-92935-2_6

〔学会発表〕（計 8 件）

- ① Hideatsu Tsukahara, Statistical Application of Distortion Risk Measure, CEQURA Conference on Advances in Financial and Insurance Risk Management, 2011 年 9 月 19 日, ミュンヘン, ドイツ.
- ② Hideatsu Tsukahara, Estimation of Distortion Risk Measure, ISI World Statistics Congress, 2011 年 8 月 24 日, ダブリン, アイルランド.
- ③ Hideatsu Tsukahara, Estimation of Distortion Risk Measure, Quantitative Methods in Finance, 2010 年 12 月 16 日, シドニー, オーストラリア.
- ④ Hideatsu Tsukahara, Comparative Analysis of VaR and Some Distortion Risk Measures, CEQURA Conference on Advances in Financial and Insurance Risk Management, 2010 年 9 月 24 日, ミュンヘン, ドイツ.
- ⑤ Hideatsu Tsukahara, Applications of Distortion Risk Measures, Workshop on “Mathematical Finance and Related Issues”, 2010 年 9 月 15 日, 京都.
- ⑥ Hideatsu Tsukahara, Comparative Analysis of VaR and Some Distortion Risk Measures, Bachelier Finance Society World Congress, 2010 年 6 月 24 日, トロント, カナダ.
- ⑦ 塚原英敦, 歪みリスク尺度の応用, 研究集会「ファイナンス計量分析の新展開」, 2010 年 3 月 30 日, 東京.
- ⑧ Hideatsu Tsukahara, Estimation of Distortion Risk Measures, 3rd International Conference on Computational and Financial Econometrics, 2009 年 10 月 29 日, リマソル, キプロス.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

塚原 英敦 (TSUKAHARA HIDEATSU)

成城大学・経済学部・教授

研究者番号：10282550