

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 12 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21510146

研究課題名(和文) 株式市場における取引符号の長期記憶性についての実証と確率モデルの研究

研究課題名(英文) Empirical study and construction of stochastic processes on the long memory property of the time series of trade signs in a stock market.

研究代表者

村井 浄信 (Murai, Joshin)

岡山大学・社会文化科学研究科・教授

研究者番号：00294447

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)： 株式市場において市場参加者の投資行動が取引符号の長期記憶の発生に及ぼす影響を確率モデルを用いて調べた。市場参加者が注文を分割発注する投資行動を統計力学のポリマーを用いて表現し離散時間の確率過程を構成し、そのスケール極限は異なるハースト指数を持つ複数の非整数ブラウン運動と標準ブラウン運動の重ね合わせであることを示した。また、分割された注文の発注時間の間隔の分布からハースト指数が定まることを明らかにした。

研究成果の概要(英文)： We study the influence of the trader's investment strategy on the long memory property of the time series of trade signs in a stock market, using the stochastic process. We present a discrete time stochastic process for polymer model which describes trader's trading strategy to split his or her order into small pieces, and prove that its scaled process converges to superposition of multiple fractional Brownian motions with different Hurst exponents and a standard Brownian motion. We also show that their Hurst exponents are derived from the distribution of the time interval of split orders.

研究分野：複合新領域

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学 社会システム工学・安全システム

キーワード：非整数ブラウン運動 Hurst指数 取引符号 長期記憶

1. 研究開始当初の背景

(1) 2004年にリローとファーマーは、ロンドン証券取引所の電子取引の高頻度データを分析して、取引符号が長期記憶をもつことを発見した。彼らは1999年から2002年までのロンドン証券取引所の20銘柄について、取引符号のハースト指数が $H \doteq 0.7$ であると推定した。また、その記憶は1週間以上の長期にわたり継続していることを確かめた。これとは独立に、ブショーとその共同研究者達も、2001年と2002年のフランス証券取引所の高頻度データを分析した結果、取引符号が長期記憶をもつことを発見した。

(2) 各証券取引所では、取引情報の詳細なデータが電子的に保存されている。秒単位で行われる取引が記録されているこの膨大なデータは、高頻度データ(ティック・データ)とよばれ、その一部は市販されている。ちょうど、顕微鏡を使って物質のミクロな構造を調べることで、マクロな全体像についての知見が得られるように、高頻度データに対し計算機を用いて統計的な処理を行うことで、株式市場についてより多くのことを知ることが出来るようになる。

(3) 東京証券取引所を含めた多くの株式市場では、連続オークション方式(ザラバ方式)で取引が行われている。この方式における売買注文には、値段を指定する「指値注文」と値段を指定しない「成行注文」がある。すべての指値注文は「板」とよばれる一覧表に表示される。売指値注文の最安値を最良売気配、買指値注文の最高値を最良買気配とよぶ。たとえば、時刻 n に買いの成行注文(または最良売気配への買指値注文)が入った場合、その時点での最良売気配で取引が成立(約定)する。このとき、その取引符号 X_n を「+」と定義する。逆に、売りの成行き注文(または最良買気配への売指値注文)が入り、取引が最良買気配で成立した場合、取引符号 X_n を「-」

と定義する。

(4) ある時系列データ X_n が「長期記憶をもつ」とは、現在のデータ値が過去のデータ値と強い相関をもつことである。相関の強さは X_n と X_{n+l} の相関係数 $\rho(l)$ (ラグ l の自己相関関数)で測ることができる。ここでは、ハイペルとマクラウドに従い、自己相関関数の和が発散するとき、すなわち

$$\sum_{l=1}^{\infty} |\rho(l)| = \infty$$

を満たすとき時系列データ X_n が長期記憶をもつと定義する。ただし、現実のデータは有限個しかなく、この定義を直ちにあてはめることはできない。そこで、自己相関関数が指数 α のべき則にしたがうとき、すなわち、

$$\rho(l) \sim l^{-\alpha} \quad (l \rightarrow \infty)$$

のとき、 $0 < \alpha < 1$ ならば長期記憶をもつと解釈する。

(5) 長期記憶が初めて科学的に取り扱われたのは、1951年の水文学者ハーストによるナイル川の最低水位データについての研究であろう。彼は、ハースト指数 H と呼ばれる指標が $H > \frac{1}{2}$ を満たすとき、そのデータが長期記憶をもつと考えた。後年、マンデルブロとその共同研究者達が非整数ブラウン運動を用いて、ハースト指数 H とべき則の指数 α の間に $\alpha = 2 - 2H$ という関係式が成り立つことを示した。また、樹木の年輪幅や太陽の黒点の数などさまざまな自然現象が長期記憶をもつことが知られている。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、国内の市場(東京証券取引所)における取引符号の長期記憶性についての実証研究を行う。さらに、統計力学の手法を用いて、取引符号の長期記憶の発生メカニズムを説明するための確率モデル

について研究を行う。

(2) ある市場参加者がひとつの銘柄の株式を大量に売買することを計画したとする。その注文を一度に市場に出してしまうと価格変化が大きくなり、買いであれば買い付けに要する資金が増えてしまい、売りであれば売却益が減少してしまう。そこで、その市場参加者は、価格に影響を与えないように細心の注意を払いながら計画段階である潜在的な注文を小口に分割して発注していく。実際、リローとファーマーは、Vodafoneの取引符号を市場参加者ごとに調べて、いくつかの市場参加者の取引履歴では取引符号に長期間の相関があることを発見した。そこで、本研究では、市場参加者のどのような投資行動が長期記憶に影響を与えているかを明らかにできる確率モデルを構築することを旨とする。

(3) 確率モデルの構築にあたり数学的な制約から市場参加者の投資行動について種々の対称性の仮定を置いている。それらの対称性の仮定の妥当性について実証データによるバックテストを行う。

3. 研究の方法

(1) 実証研究では、東京証券取引所に上場する株式のうち高い流動性が確保されている50程度の銘柄について、高頻度データから「データ日時」「板情報(5本足)」「約定価格」「取引符号」などの時系列データを取り出す。Lillo-Farmerなどの海外の先行研究を参考にしながら、時系列データの「自己相関関数」「ハースト指数」などの統計量を計測する。

(2) 高頻度データから得られた統計量を説明する確率モデルを構成する。統計力学のポリマーモデルを用いて、実証データをもとに市場参加者の投資行動をモデル化し、市場のミクロな状態を離散時間の確率過程として記述する。次に、クラスター展開の方法を用いて、ミクロな市場参加者の動きの集積が市場のマクロな性質に与える影響を調べるために、離散時間の確率過程の

「スケール極限」を考えて連続時間の確率過程を導出する。スケール極限の確率過程が各国の株式市場で観測されている現象を再現していることを確認する。

4. 研究成果

(1) 東京証券取引所の高頻度データに対する実証研究の結果、取引符号が長期記憶を持つことを確認できた。さらに、そのハースト指数はロンドン証券取引所やフランス証券取引所と同様に約0.7であることがわかった。これらの結果は、本研究期間中に執筆した著書などで発表した。

(2) 2005年にLillo-Mike-Farmerは、潜在的な注文の個数が常に一定数であり、注文量がパレート分布にしたがうという2つの仮定のもとで、取引符号が長期記憶性をもつ離散時間の理論モデルを構成した。それに対して我々は、潜在的な注文の個数が時間とともに変化する離散時間のモデルを考え、そのモデルにおける取引符号の累積和のスケール極限として連続時間の確率過程を構成し、その確率過程の増分が長期記憶性をもつことを示した。我々のモデルでは、潜在的な注文の個数は時間とともにランダムに変化し、注文量がパレート分布にしたがうことは仮定しない。その代わりに、ひとつの潜在的な注文は最大2つに分割発注され、分割発注された2つの小口の注文の時間がそれぞれ u_1 と u_2 である確率が

$$|u_2 - u_1|^{-\alpha}$$

に比例することを仮定した。ただし、 $0 < \alpha < 1$ である。時刻0から時刻 m までの取引符号の和を W_m と表すと、 $\{W_m; m \geq 0\}$ は離散時間の確率過程である。任意の $0 \leq t \leq 1$ に対し、この確率過程を時間方向に n 倍、空間方向に $n^{\alpha/2}$ 倍にスケール変換した確率過程を

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{n^{\alpha/2}} W_{[nt]} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と表す。ただし、 $[a]$ は a を超えない最大

の整数である。我々は、統計力学のクラスター展開とよばれる手法を用いて $X_t^{(n)}$ で $n \rightarrow \infty$ における極限が、

$$X_t = a_0 B_t + a_1 B_t^H$$

と1次元標準ブラウン運動 B_t とハースト指数 $H = \frac{1}{2}(2 - \alpha) > \frac{1}{2}$ の非整数ブラウン運動の線形結合で表現できる連続時間の確率過程であることを示した。ただし、 a_0 と a_1 は定数である。なお、ハースト指数が $\frac{1}{2}$ より大きい非整数ブラウン運動の増分は長期記憶性をもつことが知られている。

(3) 2005年のLillo-Mike-Farmerのモデルでは、潜在的な注文の個数が固定されているが、各注文が分割発注されるその分割数についての制限はなかった。一方で、(2)の我々のモデルでは、潜在的な注文の個数には制限がないが、技術的な制約から分割発注の分割数は最大2までという強い仮定をおいた。もっとも、Lillo-Mike-Farmerのモデルは離散時間のモデルであり、(2)の我々のモデルは連続時間のモデルであるから単純に比較する種類のものではない。そこで、クラスター展開における評価を精密に行うことにより、分割の最大数を2からある条件を満たす定数 m_0 へと拡張することに成功した。その結果、極限の連続時間の確率過程は、1次元標準ブラウン運動と(単数ではなく)複数個の非整数ブラウン運動の線形結合として表現できた。すなわち、極限の確率過程が

$$X_t = a_0 B_t + \sum_m a_m B_t^{H_m}$$

と1次元標準ブラウン運動 B_t とハースト指数 $H_m > \frac{1}{2}$ (H_m の値は m ごとに異なる) の非整数ブラウン運動の線形結合で表現できた。この論文のレフリーからは、極限の確率過程に複数個の非整数ブラウン運動の重ね合わせが現れることが興味深いという旨のコメントを頂いた。証明では、有限次元分布の特性関数の収束を示すことに

なるが、分割発注の最大数が2までという仮定を外したことで特性関数の剰余項の評価(クラスター展開における標準的な手法であるクラスターのグラフ表現による方法を用いた)が困難であった。

(4) 株価収益率(株の対数価格差, 成長率)の時系列データは長期記憶をもたないということは、すでに1950年代から知られており、この事実は効率的市場仮説を支持する有力な実証結果のひとつとなった。また、株価収益率の符号(すなわち、価格が上昇したときに「+」、下落したときに「-」とした符号)のみを取り出した時系列データも当然、長期記憶をもたない。なお、このことは高頻度データを用いた近年の実証研究においても確かめられている。一方で、(2)、(3)で取り扱ったように、株価収益率の符号とよく似た時系列データである取引符号については、近年、長期記憶を持つことが発見されている。(注: 約定数が最良気配の指値注文数を上回るとき、取引符号と収益率の符号は一致する。一方で、約定数が最良気配の指値注文数を下回るとき、取引符号が『+』または『-』であっても、収益率はゼロであることに注意する。) この論文は、分割発注の分割数に制限を与えない(3)の取引符号の理論モデルに加えて、株価収益率の符号の理論モデルを同一の確率空間の上で構築したものである。すなわち、この論文では、この対照的な2つの現象を同時に説明する数理モデルを構築している。また、(3)では特性関数の剰余項の評価をクラスター展開のグラフ表現を用いて行ったため困難であったが、この論文ではKotecky-Preiss理論とコーシーの積分公式を組み合わせる方法を用いることにより、(3)と比較して格段に簡単にその収束を示すことができた。

(5) 発注時間の間隔の上限に関するパラメータ γ と時間スケールに関するパラメータ δ を考え、スケール極限の確率過程は、2つのパラメータ γ と δ が一致するとき非整数ブラウン運動を含むが、一致しないと

きは含まないというある種の相転移現象がおこる事を示した論文を Journal of Statistical Physics 誌に発表した。

5. 主な発表論文等

【雑誌論文】(8件)

- [1] K. Kuroda, J. Murai: Long memory in finance and fractional Brownian motion, Progr. Theoret. Phys. Suppl., 査読有, **179**:(2009), 26–37, DOI: 10.1143/PTPS.179.26
- [2] J. Murai: Graphs for Menshikov-Zuev's Problems on ρ -percolation model, Okayama economic review, 査読無, **40** 4 :(2009), 115–125.
- [3] K. Kuroda, J. Murai: Stock price process and long memory in trade sign, The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report, 査読無, **247**:(2009), 59–76.
- [4] 黒田耕嗣, 増川純一, 村井浄信: 株価変動過程と売買符号の Long Memory, 物性研究, 査読無, **93** 5 :(2010), 633–636.
- [5] K. Kuroda, J.Maskawa, J. Murai: Stock price process and long memory in trade signs, Advances in Mathematical Economics, 査読有, **14**:(2011), 69–92, DOI: 10.1007/978-4-431-53883-7_4
- [6] K. Kuroda, J.Maskawa, J. Murai: Long Memory in Trade Signs and Short Memory in Stock Prices, Progress of Theoretical Physics Supplement, 査読有, **194**:(2012), 11–27, DOI: 10.1143/PTPS.194.11
- [7] K. Kuroda, J.Maskawa, J. Murai: Market-wide price co-movement around crashes in Tokyo stock

exchange, Evolutionary and Institutional Economic Review, 査読有, **10**:(2013), 81–92, DOI: 10.14441/eier.A2013005

- [8] K. Kuroda, J.Maskawa, J. Murai: Application of the cluster expansion to a mathematical model of the long memory phenomenon in a financial market, Journal of Statistical Physics, 査読有, **152**:(2013), 706–723, DOI: 10.1007/s10955-013-0783-z

【学会発表】(7件)

- [1] J. Murai: Stock Price Process and Long Memory in Trade Signs, **Workshop on Mathematical Economics, 2009**, 2009年11月13日慶応義塾大学
- [2] J. Murai: Long Memory in Finance and fractional Brownian motion, 統数研研究会「経済物理とその周辺」平成22年度第1回研究会, 2010年9月3日統計数理研究所
- [3] J. Murai: Financeにおける Long Memory Process, 無限粒子系, 確率場の諸問題 VI, 2011年2月6日奈良女子大学
- [4] J. Murai: 金融市場における余震の数理モデル, 統数研研究集会「経済物理とその周辺」平成23年度第1回研究会, 2011年9月9日統計数理研究所
- [5] J. Murai: Application of the cluster expansion for financial market, 無限粒子系, 確率場の諸問題 VII, 2011年10月16日奈良女子大学
- [6] J. Murai: Market-wide price co-movements around crashes in the Tokyo stock exchange, **Financial Networks and Systemic Risk**, 2013年7月19日京都大学

[7] J. Murai: Application of the cluster expansion to a mathematical model of the long memory phenomenon in a financial market, 新潟確率論ワークショップ, 2013年12月6日新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」

【図書】(1件)

[1] 増川純一, 水野貴之, 村井浄信, 尹熙

元: 株価の経済物理学, 培風館, (2011), ISBN-10: 4563062030

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村井 浄信 (Murai Joshin)

岡山大学・社会文化科学研究科・教授

研究者番号 : 00294447