

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 6日現在

機関番号：13103

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：平成21年度～平成23年度

課題番号：21530921

研究課題名（和文） 小中学校の接続を意図した関数の活用力を育成するカリキュラムの開発に関する研究

研究課題名（英文） A Study on Mathematics Curriculum for Learning Functions Which Takes Account of the Articulation between Elementary and Secondary Schools and of the Applications of Functions

研究代表者

布川 和彦 (NUNOKAWA KAZUHIKO)

上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授

研究者番号：60242468

研究成果の概要（和文）：本研究では、中学生が関数学習に感ずる困難が関数概念の理解にあるとの予想の下、関数概念の発達に関わる先行研究を視点としながら、中学校の準備段階である算数の関数学習の授業のデザインと実施、分析・考察を行った。これらの結果から関数が数学的对象として形成されるための活動が弱いことが見出された。また中学校での導入時の授業の分析・考察から、中学校でも同様の傾向のあることが見出され、関数学習の本格的な開始に向けた数学的对象としての形成を意識したカリキュラム開発の必要性が指摘された。

研究成果の概要（英文）：This study was conducted under the assumption that one of the main reasons why many junior high-school students find difficulty in learning functions is their undeveloped understanding of the concept of function. Lessons for students learning functions were recorded and analyzed referring to the previous related works about learning functions. The analyses showed that even primary students demonstrated many behaviors which are considered as indices of rather developed understanding of functions. These analyses and the theoretical considerations suggested that what lacks in today's curriculum is the objectification of functions, rather than the facilitation of certain modes of reasoning. These results show that the aspect of objectifying should be considered in developing mathematics curriculum.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：算数教育、数学教育、関数、数量関係、思考水準

1. 研究開始当初の背景

算数・数学における関数の学習は、自然科学に留まらず、多様な科学の研究においても重要であり、また数学が日常生活を作る場面

も多い今日の社会において、科学以外の多くの場面においても大切な考え方である。こうした社会的要請もあり、小学校の4年生以降の算数、数学の学習においては数量関係を扱

う内容が多く含まれており、関数についても明示的、あるいは暗黙的な形で取り上げられている。こうした学習は中学校において文字式を利用して本格的に始まるが、関数が結局何であるのかよくわからないと多くの中学生が感じているという話も多く聞かれる。

こうした状況に対して、関数の学習を促す指導の工夫が行われてきた。それらの多くは関数の3つの表現様式である式、表、グラフの間の移行を促すもの、および導入時や活用時において現実場面をより積極的に利用するものであった。これらは各先行研究において一定の成果が見られたとされるものの、全国調査の結果を見ると、全体として十分な改善を達成しているとは言い難い状況にある。

そこで、本研究においては、中学校の関数の学習の素地となる算数での学習も視野に入れるとともに、中学校での指導法レベルでの工夫を補うべく、子どもたちの関数概念の理解自体の問題を検討することで、より効果的な関数の学習に関わるカリキュラムの開発を行うための知見を得る必要があると考えた。

2. 研究の目的

本研究においては、小中の接続を重視して関数の学習を考える際に重要な視点として、(a)比例的推論の自覚化をベースにした多様な数量関係の理解、(b)算数・数学的アイデアによる事象や場面の意味づけという立場の重視(算数・数学的アイデアの思考の道具としての理解)、(c)自分の意味づけの自覚化と外的表現としての式の理解、の3つを想定し、これらを統合しながら子どもたちの関数の活用力を伸ばす学習活動系列を開発するための知見を得ることを目的とする。また上述の視点を考慮した学習活動系列がどのような学習を実際に引き起こすかを、個々の子どもの学習過程を学習者の視点から詳細に分析する学習過程臨床的な手法により吟味することで、知見を子どもたちの学習過程に沿うものとするようにする。

3. 研究の方法

実際の学校での授業実践を行うこともふまえ、現在使用されている教科書の活動を基本としながら、先行研究から抽出され、目的でもあげた3つの視点を参考に、関数の理解にとって重要と考える要素を意図的に組み込む形で授業を計画した。その授業を実際のクラスにおいて実践してもらい、授業の様子、学習する児童の様子をビデオカメラで記録した。ビデオの記録を、前述の視点から分析・考察を行い、前述の意図的に組み込まれた要素に関わりどのような学習が生じたかを特定した。

なお第1年次末および第2年次前半に行

われた授業実践とその分析・考察の結果より、数学的概念理解の二重性の枠組みを加えた方がよいとの判断がなされ、第2年次末にはこの視点からさらに授業を追加的に行い、その授業の記録と分析・考察も行った。

4. 研究成果

第1年次として、関数学習における問題点の現状を明確にするために、まず、本学大学院でこれまで現職の中学校教師により実施された関数導入時の実験授業と、そこでの生徒の学習過程の分析について本研究の観点から再検討を行った。その結果、関数の背後にある事象を意識しながら学習を組織することで、2量の共変性の理解が促されることが共通した知見として取り出された。また他方で、先行研究によって、小学生では一方の変量の各値に他方の変量の値を対応させる、いわゆる関数的な見方が難しいとの知見もあり、こうしたことから、中学校への接続として事象を意識でき共変性の理解を深める場面で、関数的な考え方もあわせて理解させて行くことが重要であるとの視点を得て、この視点をもとに授業を計画・実践した。

具体的には、関数の学習が「ともなって変わる量」として始められる小学校4年生を対象として、ブロックを並べてその個数の変化を考えると、事象を意識しやすく、かつ2次の関数という、比例などに比べて難度の高い関係を扱う場面を取り上げ、共变的な見方(covariational view)と関数的な見方(functional view)の双方が生まれるようにすること、またそうした関係が一定の範囲での広がりを持つこと、つまりある意味で共変性と関数的な見方が統合された考えがなされる場面ができるように、全国調査などで正答率が悪いとされる大きな数についての外挿に関わる問いかけも意図的に問うようにした。目的で述べた3つの視点と上述の2点を組み込んだ課題を用い授業を計画し、この計画により小学校4年生の「ともなって変わる量」1単元の授業を、実際のクラスで65分×4回の形で実施し、その授業の様子を教室の前後2台のカメラで記録するとともに、抽出児童4名の学習過程を個別のカメラで記録した。

そのビデオデータを質的に分析したところ、具体的な事象の中にきまりを見出そうとする傾向は十分に観察され、小学校4年生であっても、比例的なきまりだけでなく、1次関数的なきまり、さらに2次関数的なきまりなど、多様なきまりについて見出すことができた。これらのきまりの中には、共变的な見方、関数的な見方、漸化式的な見方などが含まれており、どれかの見方が特に難しいという様子が見られなかった。また、1000や40000のときといった大きな数の場合への外挿、あ

るいは与えられたデータの間の部分を考える内挿についても、十分に考えることができた。その際には、きまりをことばの式など外的表現として表し、そのきまりにより事象や場面を意味づけることで、事象や場面についての新しい情報を生成することができていた。ここでの授業は、標準的な授業について第2節で述べたような視点を強調するという形での修正を加えたものであるが、こうした授業において生じた子どもたちの学習は、海外の先行研究などでは学習者に不足すると指摘され、関数の指導において注意を向けるべき思考様式とされてきたものである。そうした思考が導入時の小学校4年生においても、素朴な形ではあるが、十分に観察されたということは、少なくともわが国の学習者に不足しているものは、関数的な見方、式化、場面への活用、外挿や内挿などの情報の生成といった特定の思考様式として論じられるべきではないとの知見がまず得られた。

ただし1年次の授業での学習に不足する面もあった。それは、第一には多様なきまりを互いに関係づけることであり、第二にはきまりをもとの事象や場面から説明しようとする傾向であり、第三に、第一と第二の影響として、場面を特徴づけるような中心的なきまりに注意を向けるということであった。ここで、きまりが関連付けられることはそれらのきまりが同じ事象の現れであるとの意識が必要であろうことに鑑み、きまりを場面と関連づけて説明したり正当化したりすることが、重要になると考えられた。

そこで、研究2年次前半では、研究当初に依拠していた視点を修正し、きまりを場面で生じている事象と関わらせることをより重視したような授業を計画し、実施した。課題の導入では、問題とする事象がイメージしやすくなるよう電子黒板により変化する様子を示す動的な提示を取り入れたり、ブロックをならべたときのきまりを考える授業では、児童が事象や場面に働きかけることで場面のメカニズムに着目できるよう、各児童にブロックを実際にわたして場面を分析することを促すとともに、きまりが単に表の上の数値で成り立っていることで終わりにするのではなく、ブロックを並べることにより生じる事象からどのように説明されるかを取り上げるようにした。また、数量関係のきまりを場面に適用するという面をさらに強化するために、単元の最後に、現実場面の課題を扱い、そこで数量関係を活用することが積極的に行われるかを見ることとした。

これらは65分×7回の授業として実施され、授業全体の様子を教室の前後2台のカメラで記録するとともに、授業に参加した4名の児童の学習過程も個別に記録して、両者をデータとして分析を行った。

その結果、第1年次と同様、2次関数的なきまりを含めて多様なきまりを見出し、それらをことばの式で表現したり、そこから外挿を行うことなどは十分に行われる様子が観察された一方で、授業で強調してとりあげた、きまりを場面や事象から説明することについては、困難を感じる様子が見られ、自分の考えるきまりと事象の変化の仕方との対応に注意が向けられない様子が観察された。また、外挿についてもことばの式から大きな数の場合を求めることはできても、事象の変化の構造化については大きな数の場合にも同様に成り立つことを意識して構造化していない様子が見られ、このことから、きまりと場面の理解との乖離が観察された。さらに、場面との関連づけの不足も原因として、きまりの間の関連づけについても、第1年次の授業と同様、あまり注意が向けられずに終わった。最後の時間で扱われた現実場面の課題では、階段の段数と1段の高さの関係をもとに校舎の高さを推測することが期待されたが、児童は段数と高さの比例関係を場面の本質的な特徴として認めること、あるいは比例関係を場面を意味づける思考の道具として使うことができず、多くの階段の高さを測定することに注意が向けられ、結果として数量関係のきまりを現実場面に活用する様子が見られなかった。

ここまでの調査授業の結果から、多様なきまりの現出の仕方の背後に場面を特徴づける関数の存在を捉えることに困難があり、そのために、関数を応用することができにくい状態にあるのではないかとこの予想が立てられた。つまり、下の図1のような概念理解の状態への移行がほとんど生じていないために、活用もされにくいのではないかと考えられた。

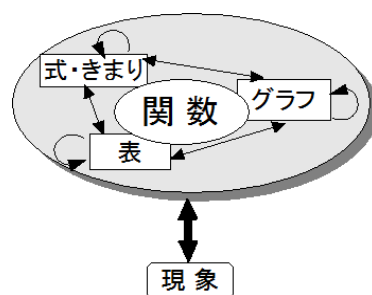


図1

そこで、第2年次後半においては、事象や場面から見出されたきまりを数学的対象として捉える見方への移行という点から検討が行われ、数学的概念の二重性のアイデアが援用された。小学校ということで、二重性のうち構造的把握の指標とされる文字式を対象とした操作、特に文字式の他の文字式への代入という操作は扱うことは難しいことから、関数の構造的把握のもう1つの指標とし

て先行研究で取り上げられることの多い、グラフの全体的な特徴の把握に焦点を当てることとした。これについて関数の学習を始めたばかりである小学校4年生が、どの程度の理解を示すかを見るために、グラフの全体的な特徴を扱う授業を計画し、実施した。比例的なきまりについてグラフの特徴を捉えることができることは、すでに第1年次、第2年次前半の授業で明らかになっていたもので、ここでは、2次関数的な場面を扱い、そのグラフを考察する学習を設定した。具体的には、周長が一定の長方形の面積を考える課題であった。この課題を中心とした65分×2回の授業を計画・実施し、これまでの授業と同様に記録を行った。

授業の結果、2次関数的な場面のグラフであるにも関わらず、小学校4年生でもグラフの全体的な特徴を捉えることができ、また対称軸の存在を意識したり、対称性を利用してグラフをかくなどを行うことができた。この授業でも、第2年次前半に実施した授業と同様、場面の導入を丁寧に行い、また場面のきまりを考える際にも場面の特徴と関わらせることを行っていたので、結果についても場面との影響を考慮する必要はあるが、前述のような学習の生起は、関数の構造的把握への移行は生じていることを示唆するものである。また、学習の過程においては、具体的な場面から離れてきまり自体を自立した存在として捉えるようになる様子も観察され、その点からもグラフの全体的な特徴、あるいはきまりの場面全体にわたる特徴を考察することが、関数概念の理解の萌芽として機能していた可能性を示すものであった。

この第2年次後半の調査の結果から、数量関係のきまり、あるいは関数を数学的対象として捉えることに関わり、小学校4年生であっても、グラフの全体的な特徴をとらえるというレベルでは、構造的把握もある程度は見られること、また、そうした考察の中で場面から離れた自律したものとして扱うことも自然にできていることが示された。直線のグラフについては通常の学習においてもその特徴に言及はされるが、この結果はグラフの全体的な特徴の考察自体を学習として取り上げることの可能性を示しており、関数の構造的把握に向けた移行は小学校においても生じていることを示唆するものである。

第2年次までの、関数概念の理解に関わる視点を意図的に組み込んだ授業に関する調査結果の分析から、第3年次前半までに、中学校への接続という面から小学校算数での関数領域の学習を検討した場合、関数の理解で重要とされる思考様式は小学生においても素朴な形ではあっても十分に観察されること、また、関数を数学的対象としてみるということについてもグラフの構造的把握と

いう面については十分に見られることが明らかとなった。そこで、これまでの結果を踏まえた上で、数学的対象の構成に関わる理論枠組みからさらに検討を行った。

ここで、領域は異なるが、数学的対象としての図形概念の形成過程を詳細に扱った理論枠組みとしての van Hiele 理論の援用が試みられた。van Hiele 理論は通常は、学習水準論として扱われ、従来の関数領域への援用でも、学習の水準を設定するものとして利用されてきた。しかし、van Hiele 理論を数学的対象の形成過程を示すものとして解釈することも行われてきており、今回の研究ではこれを援用することで、これまでの調査結果から関数概念の理解に関わる知見を引き出そうとしたものであった。

その結果、図形の性質のネットワークから数学的対象としての図形概念が形成するという議論に、David Slavit が提唱する関数についての性質的把握 (property-oriented view) という概念を組み合わせることで、調査結果を解釈することが可能になることが明らかとなった。つまり、小学生が事象や場面についての多様なきまりを見出すのが、これらを事象や場면을支配するある数量関係の諸性質の現出と考えると、それら諸性質の基体としての中心的きまりを捉えることが、数学的概念としての関数の萌芽につながることであり、その基体の存在を直観するためには諸性質の間のネットワーク、きまり相互の関係を構築することが本質的に重要ということになる。これは下の図2のような状態である。

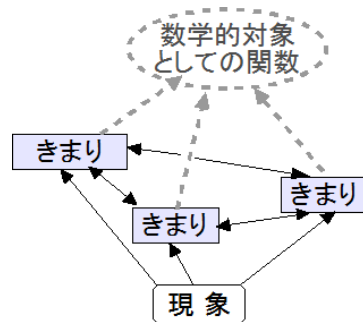


図2

この新たな視点によって、これまでの調査結果を再吟味すると、児童は多様なきまりを見出し、ことばの式などにより表現したり、内挿や外挿により新たな情報を生成したりすることはできていたものの、多様なきまりの間の関係を構築するという意識は弱いことが改めて示された。これにより、きまり間の相互関係の構築という側面が、数学的対象として関数概念を形成することにとって重要な要因であることが明らかとなった。

第3年次においては、以上で見出された要因が、実際の授業の中で扱われてきているのかを確かめるために、小学校と中学校の関数

の初歩的な学習が行われる小学校4年生と中学校1年生の授業を記録し、分析した。

小学校4年生では、2次関数的な関係を扱った課題の授業において、多様なきまりが見出され、またこの授業では一部のきまりを場面の特徴から説明することにも子どもたちの注意が向けられたが、それでもやはり、きまりの間の関係づけにまでは注意が向けられなかった。中学校1年生の授業では、通常の学習内容である比例ではなく、区間によって1次関数と定数関数を組み合わせた関数を取りあげられたが、グラフの全体的な特徴についてはやはり生徒は容易に見出すことができている。しかし、場面や事象に対して、van Hiele理論における記述的レベル、あるいはRME理論におけるmodel-ofとしての扱いが中心であることが確認された。さらに、こうした視点で現行の教科書を検討してみると、数学的対象としての関数概念を意図的に形成するという側面が不足しているばかりでなく、対象としての関数を前提にしたような記述も散見され、こうした記述の不徹底が生徒の理解の妨げになっている可能性も示唆された。

以上の結果を総括すると、従来のような手続きの把握から構造的把握への直線的な移行というよりも、関数に関わる多様な思考様式の全てが素朴レベルでは生じている状態にあり、したがって、こうした素朴レベルからより意図的な把握に移行し、その中できまりの間の関係づけ、その関係づけの基体としての関数の感得を通して、数学的対象としての関数概念を形成するという過程が、カリキュラムの構成原理として必要であることが示された。これは、関数を現実の事象などに活用されるべき数学的対象として捉えられるようにする(図1)ということでもあり、小中の接続というだけでなく、活用という面からカリキュラムを考える上でも重要な視点が得られたとすることができる。

これは、関数の本格的な学習が開始される前に数学的対象としての関数概念を形成しておくという面から、カリキュラムや教科書を修正していくという、小中の接続を容易にするカリキュラム、例えば、中学校での関数学習を促すような小学校算数のカリキュラムを具体的に構築するための方針を与えると考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① 布川和彦. (2012). 関数的内容の学習におけるきまりの関連づけと対象の構成(2). 上越数学教育研究, 27, pp. 1-12. 査読無

(http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/kaita/JJME27.pdf)

- ② 布川和彦. (2011). 関数的内容の学習におけるきまりの関連づけと対象の構成. 上越数学教育研究, 26, pp. 1-12. 査読無(http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/kaita/JJME26.pdf)
- ③ 布川和彦. (2010). 数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化. 上越数学教育研究, 25, pp. 1-10. 査読無(http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/kaita/JJME25.pdf)

[学会発表] (計2件)

- ① 布川和彦. グラフの全体的特徴に関わる4年生の学習. 日本数学教育学会, 2011年11月13日, 上越教育大学.
- ② 布川和彦. 関数的見方と共変の見方に関する一考察. 日本数学教育学会, 2010年11月13日, 宮崎大学.

[その他]

ホームページ等

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/kaita.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

布川 和彦 (NUNOKAWA KAZUHIKO)

上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授

研究者番号：60242468