様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24 年　5 月　27 日現在

機関番号：１０１０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009 ～ 2011
課題番号：２１５４０００３
研究課題名（和文）　ファイブレーションを持つカラビ・ヤウ多様体の数論的研究

研究課題名（英文）　Arithmetic study of Calabi-Yau varieties with fibration

研究代表者
後藤　泰宏（GOTO YASUHIRO）
北海道教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：40312425

研究成果の概要（和文）：本研究では，楕円曲線や K3 曲面によるファイブレーションを持った 3 次元カラビ・ヤウ多様体の数論的性質を考察した。代数体上の重さ付き射影空間の中にある 3 次元デルサルト型多様体と Voisin-Borcea のミラー対称性の構成に現れる 3 次元カラビ・ヤウ多様体に焦点を当て，ファイブレーションの情報を援用しながら，多様体のコホモロジー，ゼータ関数，L 関数を計算した。さらに,3 次元カラビ・ヤウ多様体のモジュラリティ(automorphy)と形式群の高さについて新たな知見を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied the arithmetic of Calabi-Yau threefolds with fibration by elliptic curves and/or K3 surfaces. The focus was put on Calabi-Yau threefolds of Delsarte type defined in a weighted projective space over a number field and also on Calabi-Yau threefolds considered by Voisin and Borcea in their construction of mirror symmetry. Taking into account the information of fibrations, we computed the cohomology, zeta functions and L-functions of such Calabi-Yau threefolds. We moreover obtained results on their modularity (automorphy) and on the height of their formal groups.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：カラビ・ヤウ多様体，数論幾何，ゼータ関数，L 関数，モジュラリティ，形式群

１．研究開始当初の背景

1994 年の A. Wiles と R. Taylor によるフェルマーの最終定理の証明以降，代数多様体の L 関数とモジュラリティに関する研究が盛んであった。多様体のモジュラリティの検証法の１つに，多様体のゼータ関数から計算される L 関数と保型形式から得られる L 関数とを比較し，2 次元ガロア表現における判定法を用いる方法がある。そのような方法でモジュラリティを示そうとすれば，L 関数やゼータ関数の形状を具体的に求めることのできる代数多様体が必要となる。一般に，多様体のゼータ関数の計算は現在でも容易とは言えないが，本研究の開始当初には，ヤコビ和を用いた古典的な計算方法や Dwork や Monsky-Washnitzer らの p 進的手法などによ

るゼータ関数の計算方法が知られていた。

一方，曲線上のファイブレーションを持つ3次元カラビ･ヤウ多様体において，ベース曲線のモジュラリティがファイブレーションを通して3次元多様体に持ち上がる例をSun, Tan, Zuoらが見つけた。また，超弦理論の研究の中で，3 次元カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性と K3 曲面によるファイブレーションとの間に関係性があることも知られていた。そのような現象をもとに，カラビ・ヤウ多様体の数論的性質とファイブレーションとの関係に着目するようになった。

さらに，本研究の代表者らの研究において，重さ付きフェルマー型（デルサルト型）多様体の中に，多様体のゼータ関数とファイバーのゼータ関数との間に興味深い関係性が見つかった。そのような経緯があり，カラビ・ヤウ多様体のゼータ関数，Ｌ関数，モジュラリティ，形式群の研究に，多様体のファイブレーションを取り入れることを着想した。

なお，代数多様体の形式群については研究開始当初，1 次元と 2 次元カラビ・ヤウ多様体（楕円曲線と K3 曲面）の形式群は比較的よく研究されていたが，3 次元以上のカラビ・ヤウ多様体の形式群の特徴は，まだ十分解明されていない状況にあった。

２．研究の目的

本研究の目的は，曲線もしくは曲面上のファイブレーションを利用して，3 次元カラビ・ヤウ多様体のゼータ関数，L 関数，及び形式群を調べることである。考察する多様体は，3 次元デルサルト型多様体とその変形を選んだ。具体的な目標は次の４点とした。

(1) 3 次元カラビ・ヤウ多様体の中でデルサルト型になるものを特定し，ファイブレーションの様子とコホモロジー群を調べる。

(2)上記(1)で得た多様体を有限体上で考え，そのゼータ関数とファイブレーションとの関係を探る。

(3) (2)で考察したカラビ・ヤウ多様体の形式群を調べ，ファイバーやセクションとの関係を分析する。

(4)3 次元カラビ･ヤウ多様体を数体上で考え，そのＬ関数やモジュラリティとファイブレーションとの関係を探る。

平成 21 年度は，上記目標(1)に取り組み，デルサルト型になる 3 次元カラビ・ヤウ多様体を特定し，その幾何的構造を調べることを目標とした。

平成 22 年度は，有限体上の 3 次元カラビ・ヤウ多様体のゼータ関数と形式群を調べることを課題とした。また，21 年度に完了しなかったデルサルト型になるカラビ・ヤウ多様体の特定作業を進めた。

平成 23 年度は，カラビ・ヤウ多様体の形式群を調べてファイバー等との関係を分析することと，3 次元カラビ・ヤウ多様体を数体上で考えてそのＬ関数とファイブレーションとの関係性を探ることを目標にした。

３．研究の方法

研究を進める上での，実際の活動に係わる部分と数学的な研究手法に関する部分に分けて記載する。

(1)具体的な研究活動

本研究は，研究代表者の個人的活動を中心とした研究であった。日常的には，代数幾何や数論関係の文献や論文を用いて問題解決に取り組み，定期的にはセミナーや研究集会に参加して，専門家たちとの情報交換を通して研究の進展を図った。また，国内外で合計４回の研究発表を行い，多くの専門家たちから得た助言や質問をもとに研究の方向を調整した。また，計算ソフト Magma や Maple を用いてゼータ関数，Ｌ関数，形式群の高さの計算を行った。

本研究のベースは個人的研究にあったが，研究協力者（海外共同研究者）であるクイーンズ大学教授・由井典子氏との連携は本質的に重要であった。由井氏とは，日常的には電子メールで意見交換を行い，年に２度ないし 3 度直接会って，集中的に議論した。具体的には，毎年国内で１度以上，国外で１度以上の研究打合せを行い，共著論文の執筆作業を進めた。

(2)数学的研究手法

研究方法の数学的部分は次のとおりである。年度ごとにまとめる。

①平成21年度は，研究対象となる3次元カラビ・ヤウ多様体を特定し，その幾何的構造を調べた。考察の対象は，4次元重さ付き射影空間$P^4(w_0, w_1, w_2, w_3, w_4)$内で定義されたデルサルト型多様体とその変形である。そのような多様体を次の3つの視点から研究した。

・計算機と計算ソフトMagmaを用いて，3次元カラビ・ヤウ多様体の中でデルサルト型になるものを特定する。

・上で得られたデルサルト型3次元カラビ・ヤウ多様体にファイブレーションを考え，それに付随するセクションやファイバーの幾何学的特徴を記述する。

・得られた3次元カラビ・ヤウ多様体のコホモロジー群を計算する。

②平成 22 年度は，前年度未完成であったデルサルト型多様体の特定に係わる計算を完成することから始めた。そして，次の２つの方法に沿って研究を進めた。

・研究対象となるデルサルト型多様体のゼータ関数と，ファイブレーションに付随して現れるファイバーやセクション等のゼータ関数を計算する。そして，両者を比較すること

により，ゼータ関数とファイブレーションとの間に存在する関係を具体的に探る。
・デルサルト型多様体の形式群の高さを計算し，ファイバーやセクション等から得られる形式群の情報と比較する。

③本研究の最終年度となった23年度は，研究の目的(3),(4)を扱い，これまでに得た研究成果の集約作業を行った。数体上定義された3次元カラビ･ヤウ多様体のL関数やモジュラリティを考察し，前年度未完成であった形式群の分析（カラビ・ヤウ多様体とそのファイバー等との形式群における関係性）を続けた。そして，次の3つの方法により研究を行った。
・3次元カラビ・ヤウ多様体のファイバーやセクションの形式群の高さを計算し，カラビ・ヤウ多様体自身の形式群の高さとの関係性を探る。
・これまでに得たカラビ・ヤウ多様体のゼータ関数の情報を用いて，数体上定義されたカラビ・ヤウ多様体のＬ関数を計算する。
・上で求めたカラビ・ヤウ多様体のL関数やモジュラリティとファイブレーションとの関係を探る。

４．研究成果

本研究の主要結果は，楕円曲線や K3 曲面によるファイブレーションを持った３次元カラビ・ヤウ多様体の数論的性質に関係する。そのような３次元カラビ・ヤウ多様体の幾何的構造を調べ，コホモロジー，ゼータ関数，L 関数を具体的に計算した。そして，ファイブレーションを通して多様体のモジュラリティが持ち上がることを確認し，形式群の高さに関する新たな知見を得た。

以下では，研究対象となったカラビ・ヤウ多様体の幾何的構造，コホモロジーの計算，ゼータ関数とＬ関数の具体的計算，モジュラリティの考察，形式群の高さの計算，という5つの項目に分けて成果を述べる。最後には，残された課題と今後の展望についてまとめる。

(1) 研究対象の特定と幾何的構造の考察

本研究の考察の対象は，4 次元重さ付き射影空間内で定義された３次元（重さ付き）デルサルト型多様体とその変形である。ここで，3 次元デルサルト型多様体とは，5 つの変数 x_0，x_1，x_2，x_3，x_4による５個の単項式の和によって定義された３次元超曲面のことである。さらに，巡回商特異点しか現れないようにするため，擬スムーズな多様体に制限した。最初の成果は，これらの条件をみたす定義式の特定である。具体的には，定義式に現れる単項式は x_i^n，$x_i^n x_j$，$x_i^n+x_i x_j^m$，$x_i^n x_k+x_i x_j^m$ の形状をしたものに限られることを示した。

上記の条件をみたすデルサルト型多様体で３次元カラビ・ヤウ多様体となるものは数多くある。また，それぞれの多様体に対する曲線や曲面上のファイブレーションの入れ方も何通りもある。その中でも特に，Voisin と Borcea によるミラー対称性の構成に現れるS×E/(σ，ι)に双有理な３次元デルサルト型多様体に焦点を当てて研究した。ここで，SはK3 曲面，Eは楕円曲線，σとιはそれぞれへの反シンプレクティックな対合である。

本研究で得た成果は，S×E/(σ，ι)の特異点解消により得られる３次元カラビ・ヤウ多様体の幾何学的特徴づけである。例外因子の個数の計算やSのNikulin不変量の計算を行った。特に,SのNikulin不変量については，それまでに知られていなかった計算式や具体例を見つけることができた。

(2) ファイブレーションとコホモロジーの計算

上で述べたS×E/(σ，ι)から得られる３次元カラビ・ヤウ多様体は，自然に楕円曲線 E や K3 曲面 S によるファイブレーションを持つ。そこで，そのファイブレーションに現れるファイバーやセクションを考察した。ファイバーの記述は，(特異ファイバーを含めて) 容易であったが，セクションについては，十分に記述できたのは自明なものだけであった。ただ，セクションの困難さは当初から予想されていたことであり，本研究の遂行に影響はなかった。

コホモロジーの計算に関しては，まず３次元（重さ付き）デルサルト型多様体のコホモロジーの主要部分は比較的容易に計算できた。一方，この多様体は特異点を持つので，数論的性質を考察するには，特異点を解消したモデルを確認する必要がある。よって，特異点解消がコホモロジーに与える影響を正確に記述した。特に，S×E/(σ，ι)から得られる 3 次元カラビ・ヤウ多様体の場合は，SとEのコホモロジーを詳しく求めることによって，全体のコホモロジー（の少なくとも主要部）を記述した。

(3) ゼータ関数とＬ関数

数論的性質を議論するために，カラビ・ヤウ多様体を有限体上や数体上で考察した。一般に，デルサルト型多様体はフェルマー型多様体で覆うことができ，フェルマー型多様体のゼータ関数はヤコビ和などを用いて計算することができるので，フェルマー型多様体と類似のことがデルサルト型多様体についても成り立つ。ただ，その場合でも，覆い方が全射でなかったり，特異点解消の影響を考慮しなくてはならなかったりする場合がほとんどである。覆い方が全射でない場合，誤差部分に関わるゼータ関数の記述は，やや複雑になった。一方，特異点解消に関わるゼータ関数は比較的容易に計算できた。いずれの場合においても，3次元カラビ・ヤウ多様体のゼータ関数の主要部分は，正確に記述することがで

きた。

次に考察したのは，カラビ・ヤウ多様体のファイブレーションに関わるゼータ関数である。セクションは自明なものしか見つけることができなかったが，ファイバーは詳しく分析できた。ファイバーのほとんどは2次元または1次元の重さ付きデルサルト型多様体になることが分かり，それらのゼータ関数はヤコビ和などを用いて記述することができた。特異ファイバーの中にはデルサルト型にならないものも現れたが，それらのほとんどは有理曲面や有理曲線であったので，少なくともゼータ関数の概形は決定することができた。そして，ファイブレーションから得られたゼータ関数と3次元カラビ･ヤウ多様体本体のゼータ関数を比較し，関係を見つけようとした。すべての多様体に当てはまる普遍的な関係性の定式化には至らなかったものの，個々のカラビ・ヤウ多様体においては，2種類のゼータ関数の関係を具体的に記述できた。そして，顕著な関係性が得られた場合に，それを具体的に考察した。

ゼータ関数の次はL関数を計算した。これまでに得た3次元カラビ･ヤウ多様体のゼータ関数の情報を用いて，数体上定義された3次元カラビ・ヤウ多様体のL関数の計算を行い，カラビ・ヤウ多様体のL関数とファイブレーションとの関係性を探った。ゼータ関数のレベルで明確な関係性が得られている場合には，オイラー積を通してその関係性がL関数にも持ち上がる。ただ，オイラー積自体がやや形式的なものなので，関係性の持ち上がり方も形式的とならざるを得なかった。中には，具体的かつ実質的な関係式が得られた例もあった。たとえば，量指標に付随するL関数とHeckeのL関数を用いてファイブレーションとの関係性を記述できるような場合である。

(4) モジュラリティ

上記の研究で得たコホモロジーとL関数の計算結果をもとに，3 次元カラビ・ヤウ多様体のモジュラリティ(automorphy)を考察した。中でも，$S\times E/(\sigma,\iota)$の特異点解消により得られる3次元カラビ・ヤウ多様体Xを詳しく調べ，Ron Livné 氏と Noriko Yui 氏との共同でXのモジュラリティを証明した。その証明では，S がデルサルト型 K3 曲面となることが本質的である。また，E が虚数乗法を持つ場合に，X が CM 型になることが分かった。これらの結果は，ある意味で，多様体のモジュラリティがファイブレーションを通して高次の多様体に持ち上がることを示すものである。

(5) 形式群

重さ付きデルサルト型方程式で定義される3次元カラビ・ヤウ多様体を正標数の体上で考えるとき，1 次元の形式群が現れる。そこに現れる形式群の高さは，1～12，14，16，18，20，21，22，42 などの値をとることが分かっていた。本研究では，ファイブレーションのファイバーやセクションに1次元ないし 2 次元のカラビ・ヤウ多様体が現れる場合を考察した。そこには，ファイバーやセクションに付随する1次元形式群が存在し，高さを計算することにより，数多くのデータを収集することができた。ファイバーらの形式群と 3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群との間に分解式のような関係式を見つけることはできなかったが，ファイバーらの形式群の高さが3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さを超えないことは示せた。また，3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さについても新しいデータを数多く得ることができた。

(6)　成果の位置づけと今後の展望

本研究の成果は，有限体上や代数体上で定義された3次元カラビ・ヤウ多様体の数論的性質の分析である。それは，多様体のゼータ関数，L 関数，モジュラリティに関係することから，数論幾何に係わる研究の一部として位置づけられる。一方，K3 曲面の Nikulin 不変量に関する結果や3次元カラビ・ヤウ多様体の幾何学的性質の分析は，一般の代数幾何の結果として位置づけられる。また，カラビ・ヤウ多様体の形式群に関する新たな知見は，正標数の代数幾何に関する結果である。

以上の成果をもとに，2 編の論文を準備中である。特に，成果(2)～(4)に関しては，Ron Livné 氏と Noriko Yui 氏との共著で“The automorphy of certain K3 fibered Calabi-Yau threefolds with involution over Q”という論文の作成が最終段階に入った。

本研究では，ファイブレーションを援用してゼータ関数やL関数，モジュラリティを考察した。それゆえ，必ずしもファイブレーション自身に研究の焦点が当てられていたとは言えない。今後は，カラビ・ヤウ多様体のファイブレーションを中心テーマとする数論的な研究も行いたい。

また，本研究では，フェルマー型やデルサルト型多様体に変形を導入した場合の分析は，研究目標には含めていなかった。しかし，変形を加えた多様体は，ミラー対称性をはじめ数多くの応用を内在する。今後は，変形を持つデルサルト型多様体の考察を新たな研究課題として設定したい。また，反シンプレクティックな対合を持つ K3 曲面の数論的考察や，K3 曲面と3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の分析には，さらなる展開が期待できる。これらについては，今後も継続して研究を進めたい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）
①Yasuhiro Goto, Remke Kloosterman and Noriko Yui, Zeta-functions of certain K3 fibered Calabi-Yau threefolds, International Journal of Mathematics, 査読有, 22 巻, 2011 年, pp. 67-129

〔学会発表〕（計 4 件）
① Yasuhiro Goto, On K3 Surfaces with Non-symplectic Involution, 2011 NCTS Number Theory Seminar, 2011 年 11 月 30 日, National Center for Theoretical Sciences, 台湾
② Yasuhiro Goto, On K3 surfaces with involution, Workshop on Arithmetic and Geometry of K3 Surfaces and Calabi-Yau threefolds, 2011 年 8 月 22 日, Fields 数理科学研究所, カナダ
③ Yasuhiro Goto, Calculations on K3 surfaces with involution, Calabi-Yau Manifolds and Mirror Symmetry seminar, 2011 年 7 月 14 日, Queen's 大学, カナダ
④Yasuhiro Goto, Zeta-functions of Various Calabi-Yau threefolds, Calabi-Yau Manifolds and Mirror Symmetry Seminar, 2009 年 9 月 17 日, Queen's 大学, カナダ

〔その他〕
ホームページ等
①　北海道教育大学研究者総覧
http://kensoran.hokkyodai.ac.jp/
内の後藤泰宏の項目

６．研究組織
(1)研究代表者
後藤　泰宏（GOTO YASUHIRO）
北海道教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：40312425

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者（海外共同研究者）
由井　典子（YUI NORIKO）
クイーンズ大学・数理科学研究科・教授