様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年６月７日現在

機関番号：12401
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2009～2011
課題番号：21540007
研究課題名（和文）　表現論の視点から見た有限群のコホモロジー

研究課題名（英文）　Cohomology of finite groups from the view point of representation theory

研究代表者
飛田　明彦（HIDA AKIHIKO）
埼玉大学・教育学部・准教授
研究者番号：50272274

研究成果の概要（和文）：有限群およびに有限次元多元環のコホモロジー論について、表現論的な手法により研究を行った。外積代数や次数付きホップ代数上の加群に対して、ホッチシルド・コホモロジーを用いた加群の多様体と、加群のランク多様体の性質について調べ、特に、テンソル積に関する結果を得た。また、有限群の mod-p コホモロジー環への両側バーンサイド環の作用について研究を行い、その組成因子に関する結果を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied the cohomology theory of finite groups and finite dimensional algebras using methods of representation theory. We considered the varieties of modules defined by Hochschild cohomology and the rank varieties of modules over exterior algebras or graded Hopf algebras. In particular, we obtained some results on tensor products of modules. On the other hand, we studied the action of double Burnside algebra on the mod-p cohomology algebra of a finite group and obtained some results on composition factors.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	300,000	90,000	390,000
2010 年度	300,000	90,000	390,000
2011 年度	300,000	90,000	390,000
総　計	900,000	270,000	1,170,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：有限群・表現論・コホモロジー

１．研究開始当初の背景

1980 年代から始まった有限群の表現論におけるコホモロジー的な手法、加群の多様体の理論、は多くの成果を挙げてきた。これらの結果に触発されて、他の設定での類似の理論が様々に展開され、特に自己移入的な有限次元多元環の場合が盛んに研究され始めていた。

一方、有限群の両側バーンサイド環は、分類空間の安定ホモトピー論の観点から研究されてきたが、有限 p-群上のフュージョンシステムとの関係が見いだされ、この方面からの研究が重要となっていた。

２．研究の目的

本研究の目的は、有限群の p-部分群に関係した内部構造、有限群の正標数 p の体上の群多元環の表現論、分類空間のホモトピー的な性質について、群のコホモロジーを通して、3 者の間の関係に焦点をあてて解明することである。

また、群多元環やそのブロックイデアルの

一般化として自己移入的な有限次元多元環を扱い、そのコホモロジー論について分析することも目的である。

３．研究の方法

(1) まず、群多元環の一般化を念頭におき、自己移入的な有限次元多元環上の加群のコホモロジー論について、ホッホシルド・コホモロジーから定義される台多様体と、ランク多様体を題材として研究を行う。これについては、主に有限 p-群や基本可換群の群環の一般化を対象とする。

(2) 有限群のマッキー関手、あるいは両側バーンサイド環を用いた研究を行う。両側バーンサイド環は次の点で本研究に深く関わる対象である。

①有限群の局所構造の一般化であるフュージョンシステムは両側バーンサイド環の特殊な冪等元として捉えられる。

②分類空間の安定圏での自己準同型環と密接な関係がありコホモロジー環に作用している。

③有限群の外部自己同型群の群多元環を含んでいる。

ここでは、コホモロジー環への作用を通して両側バーンサイド環上の既約加群や直既約加群について解析を行い、その結果を応用する。

４．研究成果

(1) 有限次元多元環のホッホシルド・コホモロジーと加群の多様体に関する研究成果。

A を体 k 上の有限次元自己移入的多元環とし、R を A のホッホシルド・コホモロジー環の斉次部分環とする。このとき、A-加群 M に対して M の台多様体 V(M) が R を用いて定義され、その幾何学的な性質は M の表現論的な性質に大きく関わっている。これは、有限群の群多元環を考えた場合の加群の多様体の理論の一般化と考えられ、群多元環の場合の性質の類似の性質が成立する。しかし、群多元環以外の状況では２つの加群のテンソル積を適切に定義することができないという問題点がある。一方、ある種の多元環には基本可換 p-群の場合の一般化としてランク多様体 W(M) も定義される。

本研究では、Solberg (2006) により提唱された左加群 M と両側加群 X の A 上のテンソル積の多様体のテンソル積性質、つまり、「テンソル積の多様体は V(M) と V(X/JX) の共通部分になる」について、研究を行った。ここで、J は A の根基である。多元環として主に有限次元の外積代数を対象とした。

体 k から定数 a をとり、A の生成元を定数 a 倍するという自己同型写像に関して A を片側から捻った両側 A-加群を A[a] とする。両側加群 X としては主に、a(1)、...、a(n) を k の元とし、両側加群として各剰余加群が、

A[a(1)]、A[a(2)]、...、A[a(n)]

と同型となるような部分加群のフィルトレーションを持つ両側加群を対象とした。これは有限 p-群の群多元環の場合の自然な一般化となる条件である。この設定のもとで、テンソル積性質について調べ次の結果を得た。

定理　任意の i、j について a(i)+a(j) は 0 ではないとすると、X は任意の R について テンソル積性質を満たし、またランク多様体についてもテンソル積性質をみたす。

また、次数付きホップ代数に関する結果（下記の (2) ）を利用することにより次の結果を得た。

定理　左加群として X は次数付きであり、右加群として、X/XJ は次数付き加群であるとする。また、k 双対 D についての双対性

W(D(X/JX))=W(X/XJ)

が成り立つならば、X はランク多様体に関するテンソル積性質をみたす。

(2) 次数付きホップ代数と加群のランク多様体に関する研究成果。

素数 p に対する有限 p-群の標数 p の体上の群多元環の一般化として、量子完全交差多元環 A について研究を行った。この多元環では加群 M のランク多様体 W(M) を定義することが可能である。また、次数付きホップ代数の構造を持っており、２つの次数付き加群 M と N に対して、その基礎体 k 上の次数付きテンソル積を考えると、再び A-加群の構造を持っている。次数付きテンソル積のランク多様体が２つの加群の多様体の共通部分となる、というテンソル積性質について研究を行った。

多元環 A の生成元の個数を m とし、整数の加法群 Z の m 個の直和を I とおく。A は I 次数付き代数であり、加群も I 次数付き加群を考察の対象とする。A は多元環としては次数付きの捩じれテンソル積という操作で構成されることが知られているが、ホップ代数としても捩じれテンソル積の操作で構成されることを証明した。

この構成を利用して、加群の次数付きテンソル積のランク多様体について、共通部分に関連した下からおよび上からの評価式を与えた。

次数付き加群 M のサポート s(M) とランク多様体 W(M) にのみ依存する部分多様体 U(M) と Y(M) が定義され、

定理　次数付き加群 M と N について、次数付きテンソル積のランク多様体は、U(M) と

W(N) の共通部分を含み、一方、Y(M) と W(N) の共通部分に含まれる。

というものである。

系として、テンソル積が自由加群となるためのランク多様体に関する十分条件が得られた。また、いくつかの特別な場合には、この評価式は等式となり、テンソル積性質が成立することが示された。

一方、上記の評価式にはまだ幅があり、もっと良い評価式が得られるのではないか、とも予想されている。

(3) 有限群のコホモロジー環への両側バーンサイド環の作用に関する研究成果。

奇素数 p に対して、位数が p の３乗で各元の位数は p である p-群を P とする。P の標数 p の体 k を係数とするコホモロジー環 H(P,k) について研究を行った。P は可換でない p-群の代表的な例であり、そのコホモロジー環は非常に複雑で興味深い構造を持っている。P の体 k 上の両側バーンサイド環 A(P,P) は両側 P 集合の同型類を基底として持つ多元環であり、分類空間 BP への自然な作用とともにコホモロジー環に作用している。H(P,k) の A(P,P)-加群としての構造について、特に組成因子について解析することが目的である。

まず、既約 A(P,P)-加群の分類を分類し、それらの外部自己同型群 Out(P) 上の加群としての構造を決定した。既約 A(P,P)-加群は P の部分群とその外部自己同型群の既約加群に対応して構成される。 P の真部分群は位数 p の巡回部分群と位数が p の２乗である基本可換 p-群である。その中でも特に、巡回部分群の外部自己同型群の自明な加群に対応するものと、基本可換群の外部自己同型群の既約射影加群に対応するものは特別な構造を持っている。これらは P の外部自己同型群の加群としてみたときには既約ではなく、ボレル部分群の１次表現からの誘導表現と同型となっている。

これらを含めて、真部分群 Q に対応するものは、そのコホモロジー H(Q,k) の組成因子として先ず捉えた後、H(P,k) に誘導することも可能である。そのために、真部分群からは得られない既約加群について調べる問題が残される。

本研究では、素数 p=3 の場合に限定し、H(P,k) の部分加群の剰余加群として既約 A(P,P)-加群で真部分群からは誘導されないものをすべて構成した。

P の中心による剰余群からの膨張写像により得られる次数２の斉次元 x 、yと、中心からのノルム写像により得られる次数６の斉次元 z により生成される部分環 T を考え、その中にこれらの既約加群をすべて構成した。P の外部自己同型群 Out(P)は３元体上の２次元一般線形群であり、その既約加群は、自明な加群 k、行列式表現 det 、自然な２次元加群 U、射影的既約加群 W、及びにそれらと行列式表現とのテンソル積、U’、W’の６種類である。

既約加群は T の部分剰余加群として次のように実現される。x、y により生成される部分環の 2n 次斉次部分を M(n) とする。各既約 Out(P)-加群 S に対して、T の部分 Out(P)-加群 M 、N で次の条件をみたすものを構成する必要がある。

(*) Out(P)-加群としてM/N は S と同型であり、P の任意の部分群 H と、H から P への任意の群準同型写像 f で f(H) < P なるものについて、transfer 写像の像 Tr (f*(M)) は N に含まれる。

このとき、M/N は該当する性質を持つ既約加群である。

実際にこの条件をみたす M、N は次のデータで与えられる。ここで V は v の２乗である。

次数	M	N	M/N
6	kv+M(3)	M(3)	det
8	vM(1)	0	U’
10	vM(2)	0	W’
12	kV+M(6)	M(6)	k
14	VM(1)+vM(4)	vM(4)	U
16	VM(2)	0	W

P のコホモロジー環は非常に複雑な構造をしているが、上記の部分環 T は扱いやすく、その構成も自然である。５以上の素数 p についても同様の構成ができることが予想される。また、一般の有限 p-群に対しても、このような構成により、両側バーンサイド環上の既約加群で真部分群から誘導されてこないものが構成できることが期待される。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① 飛田明彦、宮地兵衛、Module correspondences in Rouquier blocks of finite general linear groups, in Representation Theory of Algebraic groups and Quantum groups, Progress in Mathematics 284 ,(2010), 82-92、査読有

② 奥山哲郎、佐々木洋城、飛田明彦、有限群のコホモロジー論、「数学」62、(2010)、 240-266、査読有

③ 飛田明彦、Varieties of modules for some selfinjective algebras、京都大

学数理解析研究所講究録、1679、(2010)、34-43、査読無
④ 飛田明彦、Varieties of modules for finite groups and finite dimensional algebras、第54回代数学シンポジウム報告集、(2009)、65-76、査読無

〔学会発表〕（計３件）
① 飛田明彦、 有限群の両側 Burnside 環の表現論、有限群のコホモロジー論とその周辺、2011年8月31日、京都大学数理解析研究所
② 飛田明彦、自己移入的多元環上の加群の多様体について、有限群のコホモロジー論とその周辺、2009年9月1日、信州大学
③ 飛田明彦、Varieties of modules for finite groups and finite dimensional algebras、第54回代数学シンポジウム、2009年8月3日、明治大学

６．研究組織
(1)研究代表者
飛田　明彦（HIDA AKIHIKO）
埼玉大学・教育学部・准教授
研究者番号：50272274

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし