

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 11 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540008

研究課題名（和文） 数論的 D 加群を用いた p 進 Hodge 理論の研究

研究課題名（英文） Research on p-adic Hodge theory with arithmetic D-modules

研究代表者

辻 雄 (TSUJI TAKESHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：40252530

研究成果の概要（和文）：p 進体上の良い還元をもつ固有非特異代数多様体上の p 進 perverse 層の p 進 Hodge 理論について研究し、局所系の場合の G. Faltings の crystalline 層の概念を特異点集合が正規交叉因子となる perverse 層へ拡張した。また D 加群の nearby cycles の観点から構成した p 進コホモロジーの重さスペクトル系列について研究し、関手性や、双対性、Frobenius 自己同型、代数的対応との両立性を証明した。

研究成果の概要（英文）：Takeshi Tsuji studied p-adic Hodge theory for p-adic perverse sheaves on a proper smooth algebraic variety with good reduction over a p-adic field, and generalized the notion of crystalline sheaves for local systems to perverse sheaves whose singular locus lies on a simple normal crossing divisor. He also studied the weight spectral sequence of p-adic cohomology constructed from nearby cycles D-modules, and proved its functoriality and its compatibility with duality, Frobenius automorphisms, and algebraic correspondences.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：p 進 Hodge 理論，数論的 D 加群

1. 研究開始当初の背景

(1) 平成 2008 年度までの研究により、標数 p の正規交叉型対数的スムーズ・スキームの p 進コホモロジーを D 加群の nearby cycles の観点から構成し、重さスペクトル系列を与えていた。p 進コホモロジーの重さスペクトル系列は de Rham Witt 複体など複体を用いた構成が知られていたが、これらの複体は双対性や代数的対応との相性が悪く、重さスペク

トル系列の双対性や代数的対応との関係を調べる上での障害となっていた。1 進コホモロジーの重さスペクトル系列の双対性、代数的対応との両立性（斎藤毅）は知られていた。(2) p 進体上の良い退化をもつ固有非特異代数多様体上の p 進エタール局所系については、Faltings により crystalline 層の理論が Fontaine の crystalline 表現の一般化として導入され、crystalline 層の圏から filtered

convergent F-isocrystals の圏への忠実充満関手が構成されていた。これは複素多様体上のリーマン・ヒルベルト対応の類似である。複素多様体上では局所系のみならず perverse 層と D 加群の間の対応 (柏原, Mebkhout) が知られていた。

2. 研究の目的

p 進 Hodge 理論は Hodge 理論の p 進体上の代数多様体における類似である。p 進 Hodge 理論において、特異コホモロジー群に対応するのは p 進エタール・コホモロジー群であり、これには p 進体の絶対ガロア群が連続線形に作用する。これを de Rham コホモロジー (+いくつかの線形的付加構造) でとらえる様々な定理が証明されている。しかしながら、これまでの p 進 Hodge 理論では、代数多様体が悪くても半安定な還元を持つ場合、係数は無限因子で高々 log 的な退化を持つ場合 (いずれも log pole をもつ接続付き微分加群でとらえられる) のみ詳しく研究されてきた。本研究では、代数多様体の退化が半安定還元よりも悪い場合、あるいは p 進 perverse 層の場合への一般化に向けて、p 進 Hodge 理論を数論的 D 加群の観点から考察する。

3. 研究の方法

(1) p 進重さスペクトル系列の研究

関手性の研究は、引き戻し関手と nearby cycles D 加群の monodromy filtration との compatibility を示すことが鍵となる。D 加群の導来圏ではなく加群の圏で議論するため数論的 D 加群のある種の局所コホモロジーの消滅を示す必要があり、D. Caro の局所コホモロジー論を用いた。双対性および Frobenius との両立性については、nearby cycles D 加群の双対および Frobenius 引き戻しの具体的計算により、monodromy filtration の graded 商の記述との compatibility を示した。代数的対応との両立性については、D 加群のコホモロジーでは cup 積が捉えにくい点が主な問題であった。Cycle 類の cup 積から得られる射は、係数層の間の crystal の導来圏内での射から誘導される点に着目し、後者より重さ filtration 付きの p 進 nearby cycles D 加群の間の filtration 付き D 加群の導来圏内での射が誘導されることを示した。

(2) p 進 perverse 層の p 進 Hodge 理論

p 進体上良い還元をもつ非特異代数多様体上の p 進エタール局所系についての Faltings の crystalline 層の理論は、p 進エタール局所系を基本群の p 進表現ととらえ、局所体の絶対ガロア群の p 進表現についての Fontaine の理論を一般化することによって構成され

ている。そこで p 進 perverse 層や数論的 D 加群 (filtration, Frobenius つき) の特異点集合が正規交叉因子になっている場合に、これらを、正規交叉因子の各既約成分およびそれらの交わり (+適当な log 構造) 上の log p 進エタール局所系と可積分 log 接続付きベクトル束を用いて記述し、Faltings の理論のある種の log スキーム (スムーズとは限らない) への一般化へ帰着させた。

4. 研究成果

(1) p 進重さスペクトル系列の基本性質の研究

標数 p の正規交叉型の固有対数的スムーズ代数多様体の p 進コホモロジーが D 加群の nearby cycles の観点から構成され、nearby cycles のモノドロミー filtration を用いて重さスペクトル系列が構成されていた。このスペクトル系列の基本性質について研究し、関手性や双対性、Frobenius 自己同型、代数的対応との両立性を証明した。また log crystalline cohomology の兵藤・加藤同型が、数論的 D 加群のレベルで成り立つかについても研究し、分岐が小さい p 進体上の曲線上では局所的に成立していることを証明した。

(2) p 進 perverse 層の p 進 Hodge 理論の研究

p 進体上の良い還元をもつ固有非特異代数多様体上の単純正規交叉因子に伴う stratification についての p 進 perverse エタール層の p 進 Hodge 理論を研究した。p 進 perverse 層に対し crystalline 層の概念を定義し、crystalline perverse 層に対応する filtration と Frobenius つきの数論的 D 加群の構成を与えた。この研究の過程で、p 進 perverse 層と数論的 D 加群 (+付加構造) を、正規交叉因子の各既約成分及びそれらの交わり上の log p 進エタール局所系と可積分 log 接続付きベクトル束を用いてとらえる手法を与えた。後者についてはコホモロジーの記述も与えた。また曲線の場合について、crystalline perverse 層のエタール・コホモロジーの対応する数論的 D 加群を用いた局所的な記述を与えた。crystalline pervers 層のエタール・コホモロジーと対応する数論的 D 加群のコホモロジーの関係を明らかにしていくことが次のテーマである。また代数多様体が悪い退化をもつ場合や、perverse 層を局所系に分解する stratification が正規交叉因子でない場合も de Rham 層の視点からとらえることや、また曲線の場合は潜在安定になることに着目し stratification に条件なしで crystalline 層の理論を構築することが今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

[1] K. Bannai, S. Kobayashi and T. Tsuji, On the de Rham and p -adic realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves, Annales Scientifiques de l'ENS 43, fascicule 2 (2010), 185-234. 査読あり

[2] T. Tsuji, On nearby cycles and D -modules of log schemes in characteristic $p > 0$, Compositio Mathematica 146 (2010), 1552-1616. 査読あり

10.1112/S0010437X10004768

[3] T. Tsuji, Purity for Hodge-Tate representations, Mathematische Annalen 350 (2011), 829-866. 査読あり

10.1007/s00208-010-0582-7. 1007/s00208-010-0582-7

[4] T. Tsuji, p -adic perverse sheaves and filtered arithmetic D -modules with singularities along a normal crossing divisor, Algebraische Zahlentheorie 2011, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach Report 31 (2011) 1735-1738. 査読なし

10.4171/OWR/2011/31

[学会発表] (計6件)

[1] 辻雄, Arithmetic D -modules and weight spectral sequences, Journées de Géométrie Arithmétique de Rennes, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, France, 2009年7月7日

[2] 辻雄, Nearby cycles and D -modules of log schemes in characteristic $p > 0$, East Asia Number Theory Conference, 清華大学, 中国, 2009年8月20日

[3] 辻雄, p -adic perverse sheaves and arithmetic D -modules on a curve, Conférence de Géométrie Arithmétique en l'honneur de Jean-Marc Fontaine, Institut Henri Poincaré, France, 2010年3月

[4] 辻雄, Semi-stable reduction and arithmetic D -modules, Current trends in logarithmic geometry, Université Bordeaux 1, France, 2010年6月24日

[5] 辻雄, p -adic perverse sheaves and arithmetic D -modules on a curve, Arithmetic geometry and p -adic differential equations, 東北大学, 2010年7月2日

[6] 辻雄, p -adic perverse sheaves and filtered arithmetic D -modules with singularities along a normal crossing

divisor, Algebraische Zahlentheorie, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, 2011年6月22日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

辻雄 (TSUJI TAKESHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 40252530

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: